

**CÔNG THỨC ĐẶC TRƯNG QUẠT VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH
CỘT THÉP THÀNH MỎNG SƯỜN NGHIÊNG GÓC BẤT KỲ**
SECTORIAL PROPERTY FORMULAS AND THEIR APPLICATION IN BUCKLING ANALYSIS OF
THIN-WALLED STEEL COLUMNS WITH ARBITRARILY INCLINED STIFFENERS

NGUYỄN QUANG KHẢI^a, NGUYỄN ĐÌNH HÒA^{b,*}, BÙI HÙNG CƯỜNG^b

^aCông ty TNHH Tư vấn Đại học Xây dựng

^bKhoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

*Tác giả đại diện: Email: hoand@huce.edu.vn

Ngày nhận 19/6/2026, Ngày sửa 27/6/2026, Chấp nhận 30/6/2026

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2026.vi.vol2-2>

Tóm tắt: Bài báo tập trung xây dựng các công thức giải tích để xác định các đặc trưng hình học của cấu kiện thép thành mỏng tiết diện hở, đặc biệt phục vụ bài toán mất ổn định xoắn uốn. Đối tượng nghiên cứu là các cấu kiện thép thành mỏng chịu nén, thường được chế tạo từ thép thành mỏng tạo hình nguội, có tiết diện phức tạp với các đoạn gấp mép, lưỡi và sườn. Cơ sở lý thuyết của nghiên cứu dựa trên lý thuyết thanh thành mỏng Vlasov, xét đến ảnh hưởng biến dạng vênh của tiết diện thông qua tọa độ quạt, từ đó thiết lập các đại lượng quan trọng như vị trí tâm uốn và mô men quán tính quạt của tiết diện. Các công thức đề xuất được kiểm chứng độ tin cậy thông qua các ví dụ số, đối chiếu trực tiếp với kết quả từ các phần mềm CUFSM và GBTUL. Cuối cùng, các đặc trưng hình học này được áp dụng để tính toán lực tới hạn gây mất ổn định xoắn uốn của thanh chịu nén, chứng minh tính khả thi và hiệu quả của giải pháp giải tích đề xuất trong thực hành tính toán kết cấu.

Từ khóa: Cấu kiện thép thành mỏng chịu nén, kết cấu thanh thành mỏng, mất ổn định xoắn uốn, đặc trưng quạt, công thức giải tích

Abstract: This paper focuses on developing closed-form analytical formulas to determine the geometric properties of open-section thin-walled steel members, with a particular emphasis on flexural-torsional buckling analysis. The object of this study is compressed thin-walled steel members, which are typically fabricated from cold-formed thin-walled steel and feature complex cross-sections with folded edges, lips, and stiffeners. The theoretical framework of this research is based on Vlasov's thin-walled beam theory, which accounts

for the influence of cross-sectional warping deformation through a sectorial coordinate system. On this basis, vital parameters such as the shear center location and the warping constant of the section are successfully established. The reliability of the proposed formulas is validated through numerical examples and direct comparisons with results obtained from the specialized software packages CUFSM and GBTUL. Finally, these derived geometric properties are applied to calculate the critical load causing flexural-torsional buckling of compressed members, demonstrating the feasibility and efficiency of the proposed analytical solution in structural engineering practice.

Keywords: Compressed thin-walled steel members, Thin-walled structure, Flexural-torsional buckling, Sectorial properties, Analytical formula

1. Giới thiệu

Trong kết cấu xây dựng, các cấu kiện thép thành mỏng tạo hình nguội ngày càng được ứng dụng rộng rãi nhờ khả năng tối ưu khối lượng vật liệu, giảm trọng lượng bản thân và nâng cao hiệu quả kinh tế cho công trình. Để gia tăng độ cứng hình học và khả năng chịu lực chống lại các hiện tượng mất ổn định, các cấu kiện này thường được tạo hình dưới dạng tiết diện hở có cấu tạo phức tạp, tích hợp nhiều nếp gấp, sườn gia cường dẹt nghiêng và lưỡi (Hình 1). Một ứng dụng chịu lực điển hình và phổ biến nhất của dạng kết cấu này là các cấu kiện cột chịu nén trong các hệ khung nhà nhẹ, hoặc hệ thống cột kệ chứa hàng tải trọng lớn thiết kế theo tiêu chuẩn EN 15512 [1] hay hướng dẫn AISI [2].



Hình 1. Ứng dụng chịu nén của cấu kiện thép thành mỏng trong kết cấu

Do đặc điểm chiều dày thành rất nhỏ so với kích thước mặt cắt, các cấu kiện thép thành mỏng cực kỳ nhạy cảm với các dạng mất ổn định đàn hồi, đặc biệt là bài toán mất ổn định xoắn uốn đàn hồi dưới tác dụng của lực nén đúng tâm. Cơ sở cơ học kết cấu để mô tả ứng xử phức tạp này dựa trên lý thuyết thanh thành mỏng của V. Z. Vlasov [3], trong đó ảnh hưởng của biến dạng vênh ngoài mặt phẳng được định lượng thông qua việc tích phân hàm tọa độ quạt.

Đối với các tiết diện hở đơn giản truyền thống như chữ C hoặc chữ I không sườn, các công thức giải tích xác định đặc trưng quạt đã được trình bày tương đối chi tiết. Điển hình, Gil-Martín [4] đã đi sâu nghiên cứu quy trình xác định hệ tọa độ quạt chính cho thanh thành mỏng, trong khi Lue [5] đề xuất quy trình số hóa dựa trên việc chia nhỏ tiết diện thành các phần tử thẳng. Tuy nhiên, giải pháp của Lue đòi hỏi quy trình chia cắt hình học phức tạp và tiêu tốn thời gian khi áp dụng cho các cấu kiện có nhiều nếp gấp. Tại Việt Nam, hướng tiếp cận giải tích này cũng được các tác giả trong nước áp dụng hiệu quả cho các tiết diện hình dạng phẳng truyền thống, tiêu biểu như công thức tính toán đặc trưng hình học tiết diện hở của Cường [6], bài toán phân tích xoắn kiểm chế tiết diện chữ C của Quyên [7], hay giải pháp xác định đặc trưng cho các cấu kiện tiết diện kín chịu xoắn của Tuyền và cs. [8]. Mặc dù vậy, các nghiên cứu này hầu hết mới chỉ giải quyết cho các hệ sườn phẳng hoặc các nếp gấp có góc uốn vuông góc cố định 90° .

Khoảng trống nghiên cứu hiện nay là sự thiếu vắng các công thức giải tích tường minh để xác định đặc trưng quạt cho các tiết diện có sườn dập nghiêng một góc α bất kỳ. Khi gặp dạng tiết diện đặc thù này, kỹ sư kết cấu hiện nay thường phải phụ thuộc hoàn toàn vào các phần mềm mô phỏng số như phần mềm CUFSM của Schafer và Ádany [9], Thin-Wall-2 của Nguyen và cs. [10] hay chương

trình GBTUL [11], hoặc thông qua các chương trình tính toán được xây dựng từ các công thức tổng quát [6] và của Xiang [12]. Mặc dù Freitas và cs. [13] đã đưa ra các quy trình tính toán kiểm tra hệ cột, song công thức giải tích tường minh dành riêng cho đặc trưng hình học của dạng tiết diện này vẫn chưa được thiết lập cụ thể. Việc bắt buộc phải xây dựng mô hình hình học chi tiết và khai báo tọa độ từng điểm nút trên phần mềm gây ra nhiều bất tiện, làm giảm tính linh hoạt trong giai đoạn tính toán sơ bộ phương án hoặc khi cần kiểm tra nhanh kích thước thực tế từ các danh mục sản phẩm thương mại như Global Storage Solutions [14] nhằm lựa chọn quy cách tiết diện.

Nhằm giải quyết triệt để hạn chế nêu trên, nghiên cứu này tập trung thiết lập các công thức giải tích để xác định chính xác vị trí tâm uốn và mô men quán tính quạt cho tiết diện cấu kiện có sườn nghiêng góc α bất kỳ. Các công thức đề xuất cho phép tính toán nhanh các đặc trưng quạt trực tiếp từ kích thước hình học tiết diện mà không cần xây dựng mô hình số phức tạp. Để chứng minh độ tin cậy, các kết quả thu được từ công thức giải tích sẽ được kiểm chứng bằng cách đối chiếu với kết quả phân tích số từ các phần mềm CUFSM và GBTUL trên một dải kích thước khảo sát. Cuối cùng, các đặc trưng hình học quạt này được áp dụng để phân tích khả năng chịu nén đúng tâm của cấu kiện theo điều kiện ổn định xoắn uốn, chứng minh tính khả thi và hiệu quả vượt trội của giải pháp giải tích đề xuất trong thực hành tính toán kết cấu xây dựng.

2. Cơ sở lý thuyết về thanh thành mỏng tiết diện hở

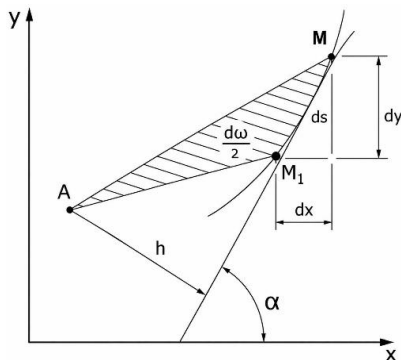
Để mô tả chính xác ứng xử đàn hồi của cấu kiện thành mỏng tiết diện hở chịu xoắn hoặc xoắn uốn đồng thời, hiện tượng vênh ngoài mặt phẳng của tiết diện cần được định lượng một cách chi tiết. Nền tảng của bài toán này dựa trên lý thuyết thanh thành mỏng đàn hồi của V. Z. Vlasov [3]

Trên đường trung bình của mặt cắt ngang, xác định một cực tính toán $A(x_A, y_A)$ và một điểm gốc M bất kỳ (Hình 2). Tung độ quạt ω tại điểm M_1 bất kỳ trên tiết diện (ứng với chiều dài cung s tính từ gốc M) được thiết lập từ biểu thức vi phân:

$$\omega = \int_0^s d\omega \quad (1)$$

trong đó: $d\omega$ là vi phân của tọa độ quạt. Nếu gọi $h(s)$ là chiều cao hạ từ cực tính toán A xuống đường tiếp tuyến với đường trung bình của tiết diện tại điểm đang xét $M(s)$, ta có quan hệ hình học $d\omega = h(s) \cdot ds$. Khi đó, hàm tọa độ quạt viết dưới dạng tích phân đường như sau:

$$\omega = \int_0^s h(s) \cdot ds \quad (2)$$



Hình 2. Tọa độ quạt trên đường trung bình của tiết diện thành mỏng hở

Dựa trên hệ tọa độ quạt đã thiết lập, các đại lượng đặc trưng hình học quạt bậc cao của mặt cắt (với vi phân diện tích $dF = t \cdot ds$) được xác định bằng các công thức tích phân tổng quát sau:

Mô men tĩnh quạt:

$$S_\omega = \int_F \omega dF = \int_0^s \omega(s) \cdot t \cdot ds \quad (3)$$

Mô men tĩnh quạt – đường theo phương trục x và y:

$$I_{\omega x} = \int_F \omega y dF = \int_0^s \omega(s) \cdot y(s) \cdot t \cdot ds \quad (4)$$

$$I_{\omega y} = \int_F \omega x dF = \int_0^s \omega(s) \cdot x(s) \cdot t \cdot ds \quad (5)$$

Mô men quán tính quạt:

$$I_\omega = \int_F \omega^2 dF = \int_0^s \omega^2(s) \cdot t \cdot ds \quad (6)$$

Vị trí tâm uốn $A_0(x_{A_0}, y_{A_0})$ và cực chính của tiết diện được xác định từ điều kiện triệt tiêu đồng thời của mô men tĩnh quạt chính và các mô men tĩnh quạt đường:

$$S_\omega = 0, I_{\omega x} = 0, I_{\omega y} = 0 \quad (7)$$

Khoảng cách dời trục hình học a_x, a_y từ cực tính toán chọn trước A đến tâm uốn chính A_0 được xác định thông qua các đặc trưng quạt tính toán với cực A theo biểu thức:

$$a_x = x_{A_0} - x_A = \frac{I_{\omega_A x}}{I_x} \quad (8)$$

$$a_y = y_{A_0} - y_A = \frac{I_{\omega_A y}}{I_y} \quad (9)$$

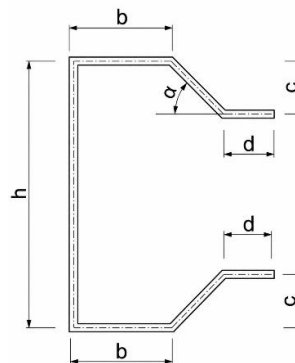
trong đó: I_x và I_y là các mô men quán tính chính thông thường của tiết diện ngang đối với hệ trục trung tâm.

Đối với các tiết diện hở đối xứng một trục (như hình chữ C), việc tâm uốn A_0 không trùng với trọng tâm $C(x_C, y_C)$ sẽ khiến lực nén dọc trục đúng tâm N sinh ra mô men xoắn phụ. Sự tương tác uốn - xoắn này là nguyên nhân trực tiếp gây ra hiện tượng mất ổn định xoắn uốn đàn hồi ở mức tải trọng tới hạn thấp hơn đáng kể so với giới hạn uốn thuần túy Euler. Do đó, xác định chính xác các đặc trưng quạt (a_x, I_ω) bằng công thức giải tích là bước quyết định để đánh giá khả năng chịu lực ổn định của cấu kiện.

3. Thiết lập hệ công thức giải tích cho các đặc trưng hình học quạt

3.1 Thông số mặt cắt hình học và đặc trưng uốn cơ bản

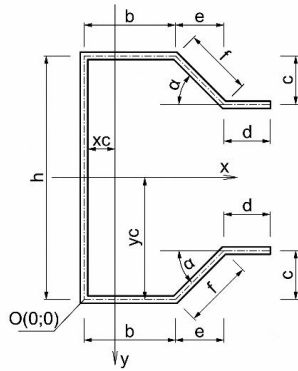
Nghiên cứu khảo sát hình dạng tiết diện cấu kiện thép thành mỏng tạo hình nguội chữ C có cấu tạo sườn nghiêng bất kỳ với các thông số kích thước hình học bao gồm: chiều cao tổng thể h , chiều rộng cánh b , độ dài hình chiếu đứng của sườn nghiêng c ứng với góc nghiêng α bất kỳ, chiều dài lưới d và chiều dày thành mỏng t (Hình 3).



Hình 3. Tiết diện thanh thành mỏng tạo hình nguội chữ C có lưới với sườn

Do bán kính cong tại các góc lượn tạo hình nguội thực tế tương đối nhỏ, mô hình toán học giải tích tiến hành đơn giản hóa bằng cách sử dụng đường trung bình và giả thiết liên kết góc không bo

tròn. Cách tiếp cận này hoàn toàn phù hợp và được chấp nhận rộng rãi theo EN 1993-1-3 [15]. Đồng thời, cấu kiện được giả thiết có tiết diện thành mỏng đồng nhất, đối xứng hoàn toàn qua trục x, tuân thủ các giả thuyết của lý thuyết thanh thành mỏng Vlasov (với chiều dày t rất nhỏ so với các kích thước tiết diện b và h). Trên cơ sở đó, hệ trục tọa độ chọn trước được thiết lập với gốc $O(0;0)$ đặt tại điểm mút đáy của thành đứng như trên Hình 4.



Hình 4. Tiết diện cấu kiện với các thông số hình học và hệ trục tọa độ

Tọa độ trọng tâm hình học $C(x_c; y_c)$ của tiết diện được xác định qua các biểu thức đại số sau:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i S_i}{\sum_{i=1}^7 S_i} = \frac{b^2 + 2bf + ef + 2bd + 2ed + d^2}{h + 2b + 2f + 2d}, \quad (10)$$

$$y_c = \frac{h}{2}$$

trong đó: e là chiều dài hình chiếu nằm ngang của sườn nghiêng; f là chiều dài thực tế dọc theo đường trung bình của sườn nghiêng:

$$e = \frac{c}{\tan \alpha}, \quad f = \frac{c}{\sin \alpha} \quad (11)$$

Mô men quán tính thông thường đối với trục chính trung tâm x của tiết diện (I_x) được xác định qua các biểu thức đại số sau:

$$I_x = \sum_{i=1}^7 (I_{xi} + a_i d_{yi}^2)$$

$$= \frac{th^3}{12} + 2\left(\frac{bt^3}{12} + \frac{h^2}{4}bt\right) + 2\left[\frac{tf^3}{12}\sin^2 \alpha + \frac{(h-c)^2}{4}ft\right] + 2\left[\frac{dt^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - c\right)^2 dt\right] \quad (12)$$

$$= \frac{th^3}{12} + \frac{bt^3}{6} + \frac{h^2 bt}{2} + \frac{tc^3}{6\sin \alpha} + \frac{(h-c)^2 ft}{2} + \frac{dt^3}{6} + \frac{(h-2c)^2 dt}{2}$$

3.2 Hàm tọa độ quạt và xây dựng biểu đồ ω

Chọn cực tính toán trùng với gốc tọa độ trung gian đặt tại điểm giữa bản bụng nằm trên trục đối xứng của tiết diện (Hình 5a). Chia tiết diện thành 7

đoạn thẳng độc lập bởi các vị trí góc chuyển tiếp của tiết diện, quy trình tích phân từng đoạn dựa theo công thức (2) cho phép xác định chính xác giá trị tung độ quạt ω tại các điểm nút chuyển tiếp hình học:

$$\omega_A = 0$$

$$\omega_1 = -2 \times S_{\Delta A_0 A_1} = -\frac{a_x h}{2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + 2 \times S_{\Delta A_0 12} = -\frac{a_x h}{2} + \frac{bh}{2} = -\frac{h}{2}(a_x - b)$$

$$\omega_3 = \omega_2 + 2 \times S_{\Delta A_0 23} = -\frac{h}{2}(a_x - b) + c(a_x + b + e) + e\left(\frac{h}{2} - c\right)$$

$$\omega_4 = \omega_3 + 2 \times S_{\Delta A_0 34} = -\frac{h}{2}(a_x - b) + c(a_x + b + e) + (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right) \quad (13)$$

$$\omega_5 = 2 \times S_{\Delta A_0 45} = \frac{a_x h}{2}$$

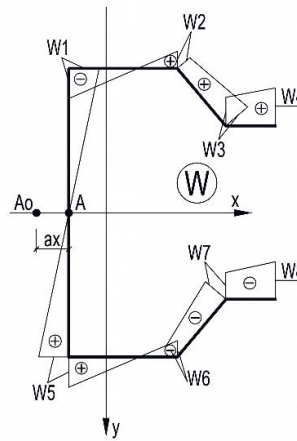
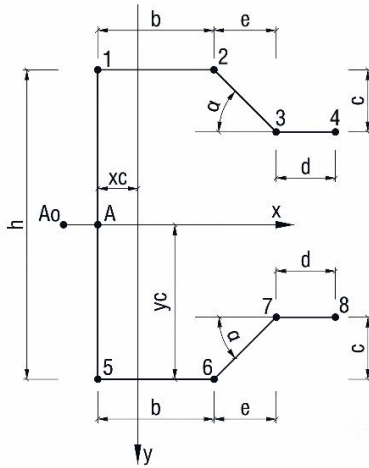
$$\omega_6 = \omega_5 - 2 \times S_{\Delta A_0 56} = \frac{a_x h}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{h}{2}(a_x - b)$$

$$\omega_7 = \omega_6 - 2 \times S_{\Delta A_0 67} = \frac{h}{2}(a_x - b) - c(a_x + b + e) - e\left(\frac{h}{2} - c\right)$$

$$\omega_8 = \omega_7 - 2 \times S_{\Delta A_0 78} = \frac{h}{2}(a_x - b) - c(a_x + b + e) - (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right)$$

trong đó, a_x là khoảng cách dời trục hình học từ cực tính toán A đến tâm uốn thực tế A_0 của tiết diện theo phương trục đối xứng x. Biểu đồ phân bố tọa độ

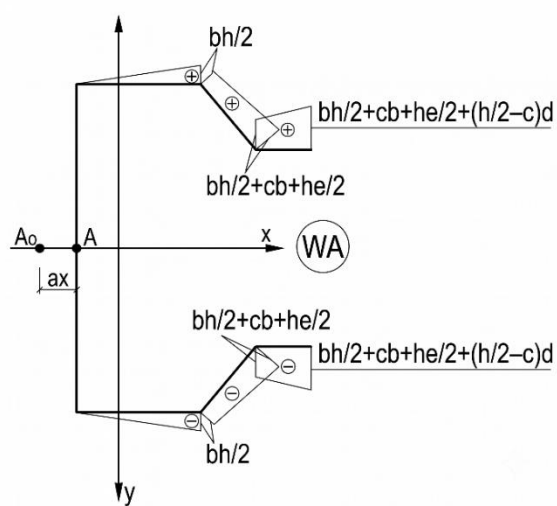
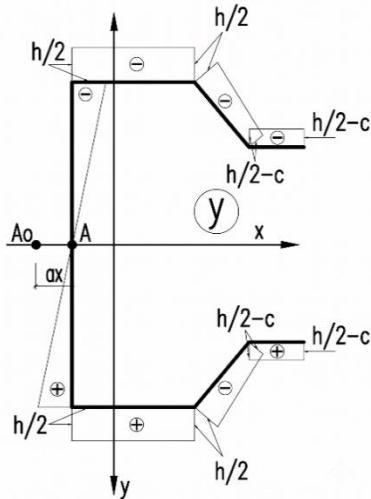
quat ω và biểu đồ tung độ thành mỏng y tương ứng dọc theo các nhánh của đường trung bình tiết diện cấu kiện được thể hiện chi tiết trên Hình 5b và Hình 6.



a) Các điểm tọa độ quat trên tiết diện

b) Biểu đồ quat của tiết diện cấu kiện

Hình 5. Các điểm tọa độ quat trên tiết diện và biểu đồ tọa độ quat của tiết diện cấu kiện



a) Biểu đồ tung độ y

b) Biểu đồ tọa độ quat ω_A

Hình 6. Biểu đồ tung độ y và tọa độ quat ω_A của tiết diện cấu kiện

3.3 Xác định tâm uốn và đặc trưng quat của tiết diện cấu kiện

Theo định nghĩa tại công thức (4), mô men tĩnh quat đường $I_{\omega_A x}$ đối với trục trung tâm x được xác định

$$\text{theo tích phân đường: } I_{\omega_A x} = \int_F \omega_A y dF = \int_F \omega_A y t ds = \sum_{i=1}^7 t_i \int_0^{S_i} \omega_A y ds$$

Áp dụng phương pháp nhân biểu đồ của Vereshchagin để tiến hành nhân biểu đồ tọa độ quat ω_A với biểu đồ tung độ hình học y (Hình 6), ta có:

$$I_{\omega_A x} = -2t \left(\frac{bh}{2} \frac{b}{2} \frac{h}{2} \right) - \frac{2t}{\sin \alpha} \left[\frac{bh}{2} c \frac{h-c}{2} + \left(cb + \frac{he}{2} \right) \frac{c}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{2c}{3} \right) \right] - 2t \left[\frac{bh + 2cb + he + \left(\frac{h}{2} - c \right) d}{2} d \left(\frac{h}{2} - c \right) \right]$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được công thức giải tích của mô men tĩnh quạt đường:

$$I_{\omega_{Ax}} = \begin{bmatrix} -tbh \left(\frac{bh}{4} + \frac{c}{\sin \alpha} \frac{h-c}{2} \right) - \frac{tc}{\sin \alpha} \left(cb + \frac{he}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{2c}{3} \right) \\ -td \left(bh + 2cb + he + \frac{hd}{2} - cd \right) \left(\frac{h}{2} - c \right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Theo công thức (8), khoảng cách từ cực tính toán A đến tâm uốn thực tế A_0 theo phương trục x (a_x) được xác định bằng hệ thức:

$$a_x = \frac{I_{\omega_{Ax}}}{I_x} = \frac{\begin{bmatrix} -tbh \left(\frac{bh}{4} + \frac{c}{\sin \alpha} \frac{h-c}{2} \right) - \frac{tc}{\sin \alpha} \left(cb + \frac{he}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{2c}{3} \right) \\ -td \left(bh + 2cb + he + \frac{hd}{2} - cd \right) \left(\frac{h}{2} - c \right) \end{bmatrix}}{\frac{th^3}{12} + \frac{bt^3}{6} + \frac{h^2bt}{2} + \frac{tc^3}{6\sin \alpha} + \frac{(h-c)^2}{2} \frac{ft}{2} + \frac{dt^3}{6} + \frac{(h-2c)^2}{2} \frac{dt}{2}} \quad (15)$$

Do tiết diện có trục x là trục đối xứng nên thành phần khoảng cách theo phương trục y bị triệt tiêu ($a_y = 0$). Tâm uốn A_0 nằm hoàn toàn trên trục đối xứng x.

Mô men quán tính quạt I_{ω} của tiết diện cấu kiện được xác định từ biểu thức (6) bằng cách tự nhân biểu đồ tọa độ quạt ω với chính nó:

$$I_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = \sum_{i=1}^7 t_i \int_0^{S_i} \omega^2 ds$$

Tiến hành tích phân và rút gọn đại số, ta thu được công thức giải tích cuối cùng của mô men quán tính quạt I_{ω} cho tiết diện cấu kiện có sườn dấp nghiêng góc α bất kỳ:

$$I_{\omega} = \left\{ \begin{aligned} & 2t \left[\frac{a_x^2 h^3}{24} + \frac{a_x^3 h^2}{12} + \frac{(b-a_x)^3 h^2}{12} \right] \\ & + 2tf \left[\frac{1}{4} \left(bh - ha_x + ca_x + bc + \frac{eh}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(ca_x + bc + \frac{eh}{2} \right)^2 \right] \\ & + 2td \left[\left(ca_x + bc + \frac{eh}{2} + \frac{bh}{2} - \frac{ha_x}{2} + \frac{dh}{4} - \frac{dc}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{dh}{2} - dc \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Các công thức giải tích từ (15) và (16) xác định các đặc trưng quạt (a_x , I_{ω}) được thiết lập hoàn toàn dựa trên tích phân liên tục đường trung bình tiết diện. Do đó, các công thức này có tính đồng dạng hình học và không phụ thuộc vào quy mô kích thước của mặt cắt. Các công thức áp dụng tin cậy cho các tiết diện chữ C có sườn nghiêng trong dải thông số hình học thực tế ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$, chiều dày thành mỏng tạo hình nguội $t \leq 4$ mm theo tiêu chuẩn EN 1993-1-3). Tính chất này cho phép kỹ sư ứng dụng linh hoạt các công thức từ các cấu kiện kích thước nhỏ (như cấu kiện kệ chứa hàng) cho đến các cấu kiện chịu lực lớn hơn trong kết cấu xây dựng.

4. Ví dụ tính toán

Để đánh giá mức độ chính xác cũng như khả

năng áp dụng thực tế của các công thức giải tích đã thiết lập ở Mục 3, phần này triển khai các bài toán kiểm chứng số cụ thể đối với cấu kiện thanh thành mỏng chịu nén dọc trục đúng tâm. Quy trình kiểm chứng và đánh giá sai số được thực hiện thông qua việc đối chiếu trực tiếp nghiệm giải tích với kết quả phân tích số từ hai công cụ chuyên dụng phổ biến hiện nay là CUFSM và GBTUL.

4.1 So sánh đặc trưng hình học quạt

Các thông số quy cách mặt cắt của các mẫu cấu kiện tiết diện chữ C được khảo sát trong nghiên cứu này được lựa chọn dựa trên danh mục sản phẩm thực tế của Global Storage Solutions [14]. Kích thước hình học tổng quát của tiết diện cấu kiện được ký hiệu $h \times$

KẾT CẤU - CÔNG NGHỆ XÂY DỰNG

$b \times c \times d \times t \times \alpha$ (trong đó các kích thước h, b, c, d, t có đơn vị mm, và góc nghiêng của sườn α có đơn vị là độ, °). Dải kích thước này đại diện cho nhóm cấu kiện có thành rất mỏng và nhạy cảm với các hiện tượng mất ổn định trong thực tế kết cấu xây dựng.

Sự sai lệch về các giá trị đặc trưng hình học quạt cơ bản xác định từ các công thức đề xuất so với các mô hình tính toán số được tổng hợp chi tiết trong Bảng 1 (đối với tọa độ tâm uốn a_x) và Bảng 2 (đối với mô men quán tính quạt I_w).

Bảng 1. Kết quả kiểm chứng vị trí tâm uốn a_x (mm) giữa công thức giải tích và các phương pháp số

Tiết diện	Theo công thức	Theo CUFSM	Sai lệch (Công thức-CUFSM)	Theo GBTUL	Sai lệch (Công thức-GBTUL)
90x40x20x20x1,6x30	-44,9909	-44,9942	0,00742%	-45,0000	0,02031%
90x40x20x20x1,9x30	-44,9895	-44,9942	0,01044%	-45,0000	0,02333%
90x40x20x20x2,35x30	-44,9870	-44,9942	0,01593%	-45,0000	0,02881%
90x40x20x20x1,6x45	-37,8622	-37,8653	0,00806%	-37,8653	0,00806%
90x40x20x20x1,9x45	-37,8610	-37,8653	0,01135%	-37,8653	0,01135%
90x40x20x20x2,35x45	-37,8587	-37,8653	0,01735%	-37,8653	0,01733%
90x40x20x20x1,6x60	-34,2748	-34,2777	0,00845%	-34,2777	0,00840%
90x40x20x20x1,9x60	-34,2736	-34,2777	0,01188%	-34,2777	0,01183%
90x40x20x20x2,35x60	-34,2715	-34,2777	0,01814%	-34,2777	0,01809%
90x40x20x20x1,6x75	-32,0881	-32,0908	0,00857%	-32,0908	0,00857%
90x40x20x20x1,9x75	-32,0869	-32,0908	0,01207%	-32,0908	0,01207%
90x40x20x20x2,35x75	-32,0849	-32,0908	0,01845%	-32,0908	0,01845%
100x50x25x25x2x30	-57,0091	-57,0146	0,00971%	-57,0000	0,01590%
100x50x25x25x2,5x30	-57,0059	-57,0146	0,01522%	-57,0000	0,01039%
100x50x25x25x3x30	-57,0021	-57,0146	0,02195%	-57,0000	0,00366%
100x50x25x25x2x45	-48,0297	-48,0348	0,01066%	-48,0000	0,06183%
100x50x25x25x2,5x45	-48,0268	-48,0348	0,01668%	-48,0000	0,05581%
100x50x25x25x3x45	-48,0233	-48,0348	0,02402%	-48,0000	0,04846%
100x50x25x25x2x60	-43,5357	-43,5406	0,01119%	-43,5406	0,01117%
100x50x25x25x2,5x60	-43,5330	-43,5406	0,01746%	-43,5406	0,01743%
100x50x25x25x3x60	-43,5297	-43,5406	0,02511%	-43,5406	0,02509%
100x50x25x25x2x75	-40,8228	-40,8274	0,01125%	-40,8275	0,01149%
100x50x25x25x2,5x75	-40,8202	-40,8274	0,01764%	-40,8275	0,01788%
100x50x25x25x3x75	-40,8170	-40,8274	0,02544%	-40,8275	0,02569%
120x60x25x25x2,5x30	-61,2510	-61,2572	0,01007%	-61,2705	0,03177%
120x60x25x25x3x30	-61,2483	-61,2572	0,01456%	-61,2705	0,03626%
120x60x25x25x3,5x30	-61,2450	-61,2572	0,01986%	-61,2705	0,04156%
120x60x25x25x2,5x45	-52,4173	-52,4231	0,01100%	-52,4230	0,01081%
120x60x25x25x3x45	-52,4148	-52,4231	0,01586%	-52,4230	0,01567%
120x60x25x25x3,5x45	-52,4118	-52,4231	0,02161%	-52,4230	0,02142%
120x60x25x25x2,5x60	-48,0121	-48,0176	0,01155%	-48,0000	0,02511%
120x60x25x25x3x60	-48,0096	-48,0176	0,01660%	-48,0000	0,02006%
120x60x25x25x3,5x60	-48,0068	-48,0176	0,02258%	-48,0000	0,01408%
120x60x25x25x2,5x75	-45,3720	-45,3773	0,01178%	-45,3772	0,01156%
120x60x25x25x3x75	-45,3696	-45,3773	0,01693%	-45,3772	0,01671%
120x60x25x25x3,5x75	-45,3669	-45,3773	0,02301%	-45,3772	0,02279%

Số liệu tổng hợp tại Bảng 1 cho thấy mức độ tương thích cao giữa tọa độ tâm uốn a_x xác định bằng công thức giải tích đề xuất với kết quả từ các mô hình số. Cụ thể, sai lệch lớn

nhất ghi nhận được so với phương pháp dải phẳng hữu hạn (CUFSM) chỉ là 0,00254%, và đối với công cụ phân tích chuyên dụng (GBTUL) là 0,06183%.

Bảng 2. Kết quả đối chiếu mô men quán tính quạt I_w (mm⁶) giữa công thức đề xuất và các phương pháp số

Tiết diện	Theo công thức	Theo CUFSM	Sai lệch (Công thức-CUFSM)	Theo GBTUL	Sai lệch (Công thức-GBTUL)
90x40x20x20x1,6x30	1450624920,10	1450624299,00	0,0000766%	1451136253,52	0,08526%
90x40x20x20x1,9x30	1722617099,76	1722616355,41	0,0001412%	1723473354,53	0,08105%
90x40x20x20x2,35x30	2130605384,07	2130604439,60	0,0000040%	2132225484,27	0,08358%
90x40x20x20x1,6x45	965329748,54	965329743,82	0,0000677%	965633133,55	0,09323%
90x40x20x20x1,9x45	1146329081,92	1146329070,79	0,0001270%	1146837115,30	0,08767%
90x40x20x20x2,35x45	1417828093,45	1417828061,24	0,0001499%	1418789328,99	0,09486%

Tiết diện	Theo công thức	Theo CUFSM	Sai lệch (Công thức- CUFSM)	Theo GBTUL	Sai lệch (Công thức- GBTUL)
90x40x20x20x1,6x60	749106188,54	749106061,49	0,0000038%	749339002,42	0,08871%
90x40x20x20x1,9x60	889563603,62	889563448,02	0,0001392%	889953495,35	0,09851%
90x40x20x20x2,35x60	1100249736,03	1100249527,81	0,0002594%	1100987438,07	0,07179%
90x40x20x20x1,6x75	619815885,18	619814290,68	0,0000189%	620021873,84	0,06700%
90x40x20x20x1,9x75	736031367,87	736029470,19	0,0000741%	736376699,05	0,05922%
90x40x20x20x2,35x75	910354600,67	910352239,44	0,0001389%	911008619,19	0,05628%
100x50x25x25x2x30	4714826520,07	4714819582,76	0,0000023%	4716816225,23	0,06775%
100x50x25x25x2,5x30	5893533207,44	5893524478,45	0,0000657%	5897419316,32	0,06851%
100x50x25x25x3x30	7072239974,05	7072229374,15	0,0000019%	7078955095,99	0,05806%
100x50x25x25x2x45	3146279295,37	3146279270,71	0,0001251%	3147449008,15	0,06441%
100x50x25x25x2,5x45	3932849163,64	3932849088,39	0,0000443%	3935133717,00	0,07598%
100x50x25x25x3x45	4719419093,29	4719418906,07	0,0000021%	4723366783,67	0,06522%
100x50x25x25x2x60	2447685373,68	2447682003,88	0,0001481%	2448568479,07	0,06590%
100x50x25x25x2,5x60	3059606755,14	3059602504,85	0,0001377%	3061329700,57	0,07240%
100x50x25x25x3x60	3671528189,15	3671523005,82	0,0002578%	3674506419,81	0,04690%
100x50x25x25x2x75	2030518436,17	2030516958,56	0,0000175%	2031288338,93	0,04381%
100x50x25x25x2,5x75	2538148079,32	2538146198,20	0,0000644%	2539652082,70	0,04758%
100x50x25x25x3x75	3045777769,59	3045775437,84	0,0001239%	3048376932,90	0,04472%
120x60x25x25x2,5x30	9761605414,85	9761592066,82	0,0000010%	9766517981,90	0,04430%
120x60x25x25x3x30	11713926606,9	11713910480,19	0,0000728%	11722413804,2	0,03790%
120x60x25x25x3,5x30	13666247917,7	13666228893,55	0,0001377%	13679723566,7	0,03607%
120x60x25x25x2,5x45	6725695462,68	6725695395,40	0,0000010%	6728733375,45	0,04515%
120x60x25x25x3x45	8070834641,87	8070834474,49	0,0000008%	8076101676,01	0,03716%
120x60x25x25x3,5x45	9415973915,30	9415973553,57	0,0000432%	9424334371,04	0,04968%
120x60x25x25x2,5x60	5357537760,34	5357531123,15	0,0001367%	5359934807,78	0,05030%
120x60x25x25x3x60	6429045387,93	6429037347,78	0,0001471%	6433189036,83	0,04218%
120x60x25x25x3,5x60	7500553097,66	7500543572,41	0,0002573%	7507134503,03	0,03322%
120x60x25x25x2,5x75	4537321855,39	4537318933,73	0,0000170%	4539481819,02	0,03107%
120x60x25x25x3x75	5444786295,15	5444782720,47	0,0000005%	5448519125,56	0,03142%
120x60x25x25x3,5x75	6352250809,59	6352246507,22	0,0000428%	6358178764,51	0,03524%

Kết quả đối chiếu giá trị mô men quán tính quạt I_{ω} tại Bảng 2 một lần nữa chứng minh độ tin cậy và sự hội tụ cao của phương pháp giải tích. Sai số lớn nhất so với phần mềm CUFSM chỉ ở mức 0,00026%, và so với phần mềm GBTUL là 0,09851%.

Sự hội tụ này cho thấy các công thức giải tích đề xuất hoàn toàn đáng tin cậy để xác định tọa độ tâm uốn và mô men quán tính quạt của tiết diện cầu kiện.

4.2 Phân tích khả năng chịu nén đúng tâm của cầu kiện theo điều kiện ổn định xoắn uốn

Để làm rõ ý nghĩa của công thức mới trong việc đánh giá trạng thái giới hạn ổn định, nghiên cứu tiến hành khảo sát một cầu kiện thành mỏng chịu nén đúng tâm có chiều cao $L=1,8\text{m}$. Cột có liên kết hai đầu dạng khớp và tự do vênh ngoài mặt phẳng tại hai đầu cầu kiện. Do đó, chiều dài tính toán khi mất ổn định uốn và mất ổn định xoắn là bằng nhau: $KL =$

$L_{eT} = L = 1800\text{ mm}$. Tiết diện hình học của cầu kiện được chọn là $100 \times 50 \times 25 \times 25 \times 2 \times 60$. Các thông số cơ lý của vật liệu thép bao gồm: mô đun đàn hồi $E = 205000\text{ N/mm}^2$; mô đun đàn hồi trượt $G = 78846\text{ N/mm}^2$; giới hạn chảy của vật liệu $f_y = 235\text{ N/mm}^2$.

Áp dụng các công thức giải tích đã thiết lập tại Mục 3, các đặc trưng hình học của tiết diện cầu kiện được xác định chính xác như sau: $A = 615,47\text{ mm}^2$; $x_C = 31,36\text{ mm}$; $I_x = 897660,5\text{ mm}^4$; $I_y = 536628,6\text{ mm}^4$; $I_t = 820,6\text{ mm}^4$; $a_x = 43,54\text{ mm}$; $I_{\omega} = 2447685373\text{ mm}^6$; $i_x = 38,19\text{ mm}$; $i_y = 29,52\text{ mm}$.

Dựa trên quy định của tiêu chuẩn thiết kế cầu kiện tạo hình nguội EN 1993-1-3 và tiêu chuẩn chuyên ngành EN 15512, các công thức xác định lực tới hạn gây mất ổn định xoắn ($N_{cr,T}$) và xoắn uốn ($N_{cr,FT}$) của cầu kiện được thể hiện cụ thể qua hệ phương trình sau:

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_{\omega}}{L_{eT}^2} \right) \quad (17)$$

$$N_{cr,FT} = \frac{N_{cr,x}}{2\beta} \left[1 + \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}} - \sqrt{\left(1 - \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}} \right)^2 + 4 \left(\frac{x_0}{i_0} \right)^2 \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}}} \right] \quad (18)$$

trong đó, các hệ số tương tác hình học và lực tới hạn uốn thuần túy Euler được xác định lần lượt:

- Tọa độ tâm uốn chính đối với trọng tâm: $x_0 = a_x + x_c = 43,54 + 31,36 = 74,9 \text{ mm}$;

- Bán kính quán tính cực đối với tâm uốn:

$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2 + x_0^2 = 38,19^2 + 29,52^2 + 74,9^2 = 7939,92 \rightarrow i_0 = 89,1 \text{ mm}$$

- Hệ số lệch tâm: $\beta = 1 - \left(\frac{x_0}{i_0} \right)^2 = 1 - \left(\frac{74,9}{89,1} \right)^2 = 0,2935$

- Lực tới hạn mất ổn định uốn thuần túy đối với trục đối xứng:

$$N_{cr,x} = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 205000 \times 897660,5}{1800^2} = 560558,2 \text{ N}$$

- Lực tới hạn mất ổn định xoắn thuần túy theo (17):

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_w}{L_{eT}^2} \right) = \frac{1}{7939,92} \left(78846 \times 820,6 + \frac{\pi^2 \times 205000 \times 2447685373}{1800^2} \right) = 200666,4 \text{ N}$$

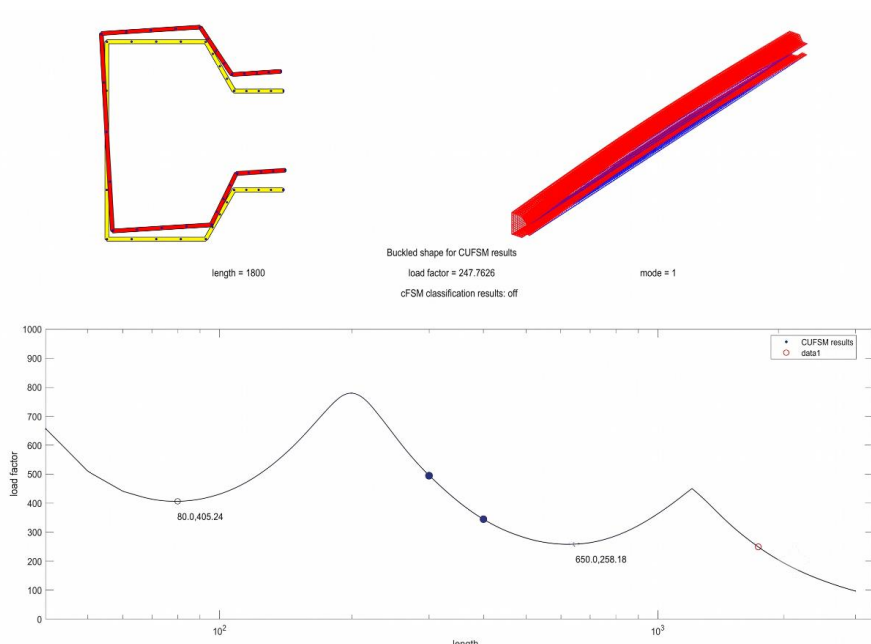
Thay các giá trị đặc trưng hình học và các lực tới hạn thành phần vào (18), ta thu được lực tới hạn gây mất ổn định xoắn uốn của cầu kiện:

$$N_{cr,FT} = \frac{560558,2}{2 \times 0,2935} \times \left[1 + \frac{200666,4}{560558,2} - \sqrt{\left(1 - \frac{200666,4}{560558,2} \right)^2 + 4 \left(\frac{74,9}{89,1} \right)^2 \frac{200666,4}{560558,2}} \right] = 157311 \text{ N}$$

$$= 157,31 \text{ kN.}$$

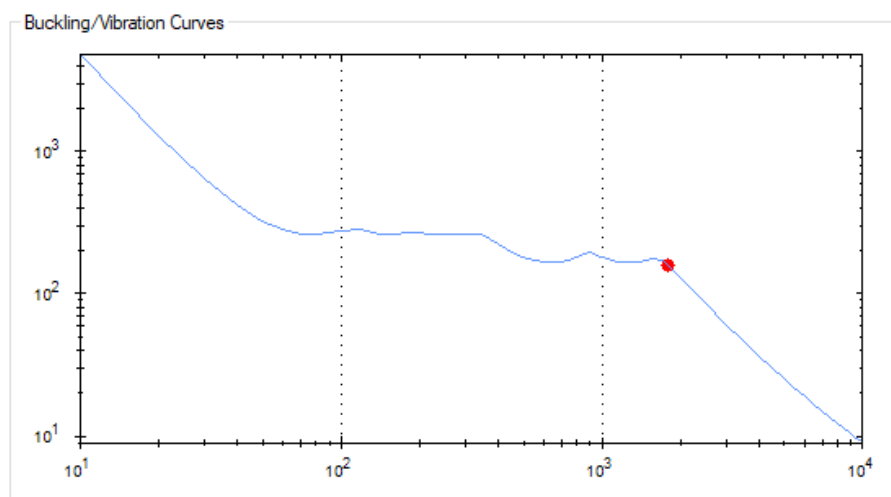
Sử dụng phần mềm CUFSM để phân tích mất ổn định xoắn uốn của cầu kiện, kết quả thu được ứng suất mất ổn định nhỏ nhất là $\sigma_{cr} = 247,76 \text{ N/mm}^2$ (Hình 7). Từ đó, lực tới hạn gây mất ổn định xoắn uốn tương ứng là:

$$N_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = 615,47 \times 247,76 = 152496 \text{ N} = 152,49 \text{ kN}$$



Hình 7. Kết quả phân tích mất ổn định xoắn uốn của tiết diện cầu kiện bằng phần mềm CUFSM

Song song với đó, khi sử dụng phần mềm GBTUL để phân tích mất ổn định xoắn uốn của cầu kiện, mô hình cho kết quả lực tới hạn là $N_{cr} = 157,15 \text{ kN}$ (Hình 8).



Results of the buckling analysis of the member with L=1800 (Mode 1)

Buckling Load: $P_b = 157.15135$

Modal participations (%) of the most important GBT modes:

P4=74.6 P2=22.72 P6=2.65 Other=0.04

Hình 8. Kết quả phân tích mất ổn định xoắn uốn của tiết diện cấu kiện bằng phần mềm GBTUL

Đánh giá sai số giữa công thức đề xuất với các công cụ mô phỏng số cho thấy mức độ hội tụ rất chặt chẽ. Sai lệch lớn nhất giữa kết quả theo công thức giải tích (157,31 kN) so với phần mềm CUFSM (152,49 kN) là 3,05% và đối với phần mềm GBTUL (157,15 kN) chỉ là 0,1%. Tất cả các mức sai lệch này đều nằm dưới giới hạn cho phép trong thực hành thiết kế xây dựng (5%). Sự tương thích vượt trội này chứng minh công thức giải tích đề xuất là một công cụ tin cậy, giúp kỹ sư dễ dàng tích hợp trực tiếp vào các chương trình tính toán tự động để dự báo chính xác lực tới hạn mất ổn định xoắn uốn của cấu kiện thép tạo hình nguội mà không cần dựng mô hình số dài bản phức tạp.

5. Kết luận

Nghiên cứu đã xây dựng thành công các công thức giải tích để xác định các đặc trưng hình học quạt (a_x , I_ω) của tiết diện cấu kiện thép thành mỏng tạo hình nguội có sườn nghiêng góc bất kỳ trong kết cấu xây dựng. Các kết luận chính bao gồm:

- Kết quả khảo sát số chứng minh sự tương thích chặt chẽ giữa công thức đề xuất với các phương pháp số, sai số đặc trưng quạt đạt dưới 0,1%. Lực tới hạn ổn định xoắn uốn đàn hồi tính bằng giải tích chỉ lệch 0,1% so với phần mềm GBTUL. Phương pháp dài bản hữu hạn (CUFSM) cho kết quả thấp hơn (sai lệch 3,05%) do có xét đến biến dạng cục bộ ngoài mặt phẳng - thành phần

biến dạng vốn bị bỏ qua trong giả thiết tiết diện cứng ngoài mặt phẳng của lý thuyết Vlasov và GBTUL;

- Các công thức đề xuất cung cấp một công cụ tính toán thuận tiện, có tính ứng dụng cao trong công tác thiết kế, kiểm tra và tối ưu hóa tiết diện cấu kiện trong hệ thống cấu kiện thép thành mỏng. Trên cơ sở này, hướng nghiên cứu có thể tiếp tục mở rộng cho các cấu kiện có tiết diện phức tạp hơn hoặc xét đến ảnh hưởng của hệ lỗ đột dọc dọc theo chiều dài cấu kiện thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] BS EN 15512:2020 (2021). *Steel static storage systems. Adjustable pallet racking systems-Principles for structural design.*
- [2] American Iron and Steel Institute. (2003). *AISI Manual Cold-Formed Steel Design 2002 Edition.* AISI Specifications for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. <https://scholarsmine.mst.edu/ccfss-aisi-spec/130/>.
- [3] Vlasov V.Z (1961) *Thin-walled elastic beams.* Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
- [4] Gil-Martín, L. M., Hernández-Montes, E. (2020). *Principal Sectorial coordinate system.* Arch Appl Mech, (90): 305–312. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01610-4>.

- [5] Lue, Dung., Liu, J.-L. & Lin, C.-H. (2007). *Numerical evaluation on warping constants of general cold-formed steel open sections*. International Journal of Steel Structures. 7(4): 297-309.
- [6] Cường, B. H. (2010). *Tính toán các đặc trưng hình học của tiết diện thanh thành mỏng hở*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) – ĐHXDHN. 4(2):16-28.
- [7] Quyên, V. L. (2023). *Tính toán xoắn kiểm chế thanh thành mỏng tiết diện hở*. Tạp chí xây dựng, 7:42-45.
- [8] Tuyền, N. M., Cường, B. H. (2015). *Tính toán đặc trưng hình học của tiết diện thanh thành mỏng kín chịu xoắn*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN, 9(3):43–51.
- [9] Schafer, B. W., Ádany, S. (2006). *Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods*. Proceedings of the Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, Orlando, Florida, 39–54.
- [10] Nguyen, V. V.; Hancock, G. J.; Pham, C. H. (2015). *Development of the Thin-Wall-2 Program for Buckling Analysis of Thin-Walled Sections under Generalised Loading*. International Conference on Advances in Steel Structures, 8., 2015, Lisbon, Portugal. Proceedings. Lisbon: ICASS.
- [11] Bebiano R, Camotim D, Gonçalves R and Silvestre N (2018). *GBTUL 2.0 – A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration of thin-walled members*, Thin-Walled Structures. 124: 235-257.
- [12] Xiang, Chunting; Seaburg, Paul A.; Crain, Robert; and Lou, Albert C. J. (2002). *On the Computation of the Cross-section Properties of Arbitrary Thin-walled Structures*. International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. <https://scholarsmine.mst.edu/isccss/16iccfss/16iccfss-session9>.
- [13] Freitas A. M. S., Freitas M. S. R., Souza F.T. (2005). *Analysis of steel storage rack columns*. Journal of Constructional Steel Research. (61): 1135-1146.
- [14] Global Storage Solutions, Pallet racking – P90 Standard details, <https://stelmag.ru/images/katalogs/Constructor%20P90.pdf>, truy cập ngày 06/05/2026.
- [15] EN 1993-1-3 (2006). *Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-3: General rules - Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*.