

ỨNG DỤNG THUẬT TOÁN RDMO TRONG THIẾT KẾ ĐA MỤC TIÊU CỦA GIÀN THÉP

APPLICATION OF RDMO ALGORITHM IN MULTI-OBJECTIVE DESIGN OF STEEL TRUSSES

TRẦN TRUNG HIẾU^{a,*}, TRƯƠNG VIỆT HÙNG^b

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

^bKhoa Công trình, Trường Đại học Thủy lợi

*Tác giả đại diện: Email: hieutt@hau.edu.vn

Ngày nhận 01/03/2025, Ngày sửa 27/03/2025, Chấp nhận 30/03/2025

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2025.vi.vol1-6>

Tóm tắt: Bài báo giới thiệu một phương pháp tối ưu hóa đa mục tiêu cho kết cấu giàn thép phẳng, ứng dụng thuật toán RDMO – sự kết hợp giữa thuật toán Rao-1 và phương pháp tiến hóa vi phân (DE). Nghiên cứu tập trung vào hai mục tiêu chính là giảm thiểu khối lượng tổng thể của giàn thép và hạn chế tối đa chuyển vị ngang tại đỉnh giàn, với biến thiết kế được xác định là diện tích tiết diện của các thanh, nằm trong một khoảng giá trị giới hạn cụ thể. Phân tích trực tiếp được triển khai nhằm mô phỏng chính xác ứng xử phi tuyến của kết cấu, đồng thời đánh giá khả năng chịu tải tối đa trong các điều kiện thực tế. Để minh họa, một giàn thép phẳng gồm 10 thanh được chọn làm ví dụ nghiên cứu. Kết quả chỉ ra rằng RDMO loại bỏ hiệu quả các tham số điều khiển phức tạp, đồng thời đảm bảo cân bằng giữa tốc độ hội tụ, độ chính xác cao và tính đa dạng của các nghiệm tối ưu. Thuật toán này cải tiến chiến lược đột biến từ Rao-1, kết hợp với sắp xếp không thống trị và khoảng cách đồng đức, mang lại hiệu suất vượt trội trong việc nâng cao thiết kế giàn thép, mở ra tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực kỹ thuật dân dụng hiện đại.

Từ khóa: Dàn thép; DE; Rao-1; Tối ưu; Đa mục tiêu; Phân tích trực tiếp.

Abstract: This paper introduces a multi-objective optimization approach for planar steel truss structures, employing the RDMO algorithm—a hybrid of the Rao-1 algorithm and differential evolution (DE). The study focuses on two primary objectives: minimizing the total weight of the truss and reducing the lateral displacement at the truss apex, with the design variables defined as the cross-sectional areas of the truss members within a specified range. Direct analysis is implemented to accurately simulate the nonlinear behavior of the structure and evaluate its maximum load-bearing capacity under realistic conditions. A 10-bar planar steel truss is selected as a case study for illustration. The results demonstrate that RDMO effectively eliminates complex control

parameters while achieving a balanced trade-off between convergence speed, high accuracy, and solution diversity. By enhancing the Rao-1 mutation strategy with non-dominated sorting and crowding distance techniques, RDMO exhibits superior performance in improving truss design, offering significant potential for widespread applications in modern civil engineering.

Keyword: Steel truss; DE; Rao-1; Optimization; Multi-Objective; Advanced analysis.

1. Đặt vấn đề

Kết cấu giàn thép, với đặc điểm nổi bật là khả năng vượt nhịp lớn, độ bền cao và sử dụng vật liệu hiệu quả, đã trở thành một lựa chọn phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp hiện đại [1, 2]. Việc thiết kế tối ưu cho các kết cấu này không chỉ nhằm mục đích giảm thiểu chi phí và khối lượng vật liệu mà còn phải đảm bảo tính an toàn, độ bền và khả năng chịu tải dưới các điều kiện thực tế phức tạp [3, 4]. Trong bối cảnh đó, tối ưu hóa đa mục tiêu (Multi-Objective Optimization - MOO) đã thu hút sự quan tâm lớn từ cộng đồng nghiên cứu nhờ khả năng cân bằng giữa các mục tiêu mâu thuẫn, chẳng hạn như giảm khối lượng kết cấu và hạn chế chuyển vị tối đa [5, 6]. Đặc biệt, khi xem xét đến ứng xử phi tuyến của giàn thép, bao gồm phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu, bài toán tối ưu hóa trở nên phức tạp hơn, đòi hỏi các phương pháp tính toán tiên tiến và hiệu quả [7, 8].

Phương pháp phân tích trực tiếp (Direct Analysis) đã được chứng minh là một công cụ mạnh mẽ trong việc mô phỏng chính xác ứng xử phi tuyến của kết cấu giàn thép, thay thế cho các phương pháp gián tiếp truyền thống vốn thường bỏ qua sự tương tác phức tạp giữa các thành phần trong hệ thống [9, 10]. Không giống như phân tích tuyến tính đàn hồi thông thường, phân tích trực tiếp cho phép đánh giá đồng

thời khả năng chịu tải tổng thể và các đặc tính phi tuyến của công trình, từ đó cung cấp cơ sở đáng tin cậy cho việc tối ưu hóa thiết kế [11, 12]. Tuy nhiên, việc áp dụng phân tích trực tiếp trong tối ưu hóa thường đi kèm với chi phí tính toán cao, đặc biệt khi kết hợp với các thuật toán meta-heuristic để giải quyết bài toán MOO [13, 14]. Điều này đặt ra nhu cầu phát triển các thuật toán tối ưu hóa mới, vừa đơn giản, vừa hiệu quả, nhằm giảm thiểu độ phức tạp và tăng cường khả năng áp dụng thực tiễn.

Trong những năm gần đây, các thuật toán meta-heuristic như Differential Evolution (DE) [15], Genetic Algorithm (GA) [16], và Harmony Search (HS) [17] đã được ứng dụng rộng rãi trong tối ưu hóa kết cấu, bao gồm cả giàn thép [18, 19]. Tuy nhiên, nhiều thuật toán MOO hiện có, chẳng hạn như NSGA-II [20], GDE3 [21], hay MOEA/D [22], thường yêu cầu điều chỉnh nhiều tham số điều khiển, đòi hỏi kinh nghiệm từ người dùng và có thể làm giảm tính khả thi khi áp dụng vào các bài toán thực tế [23, 24]. Hơn nữa, việc duy trì sự cân bằng giữa tốc độ hội tụ và tính đa dạng của nghiệm trong không gian Pareto vẫn là một thách thức lớn đối với các thuật toán này [25, 26]. Để khắc phục những hạn chế trên, một số nghiên cứu đã đề xuất các phương pháp lai ghép (hybrid approaches) hoặc cải tiến các thuật toán đơn mục tiêu (Single-Objective Optimization - SOO) thành MOO, ví dụ như việc kết hợp DE với các chiến lược đột biến mới hoặc sử dụng mô hình thay thế (surrogate models) để giảm chi phí tính toán [27, 28].

Nghiên cứu này giới thiệu thuật toán RDMO (Rao-DE Multi-Objective) [29-30], một phương pháp tối ưu hóa đa mục tiêu mới, đơn giản và không yêu cầu tham số điều khiển, được phát triển bằng cách kết hợp thuật toán Rao-1 [31] với DE [15]. RDMO sử dụng chiến lược đột biến cải tiến từ Rao-1, kết hợp với kỹ thuật lai ghép của DE, đồng thời tích hợp sắp xếp không thống trị (non-dominated sorting) và khoảng cách đông đúc (crowding distance) để đảm bảo tính đa dạng và chất lượng của tập nghiệm Pareto [20]. Không giống như Rao-1 ban đầu chỉ sử dụng nghiệm tốt nhất và tệ nhất, RDMO tận dụng nhiều nghiệm tốt và tệ để tạo ra các giải pháp mới, từ đó cải thiện đáng kể hiệu suất tối ưu hóa [32]. Nghiên cứu áp dụng RDMO vào bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu cho giàn thép phẳng, với hai mục tiêu chính là giảm thiểu khối lượng tổng thể và chuyển vị

ngang tại đỉnh giàn, sử dụng phân tích trực tiếp để mô phỏng ứng xử phi tuyến và đánh giá khả năng chịu tải tối đa. Một ví dụ minh họa với giàn thép 10 thanh được sử dụng để kiểm chứng hiệu quả của phương pháp đề xuất, hứa hẹn mở ra tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong thiết kế kỹ thuật dân dụng hiện đại [5, 11].

2. Thiết lập bài toán tối ưu đa mục tiêu cho giàn thép sử dụng phân tích trực tiếp

Bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu được thiết lập để tối ưu hóa giàn thép phẳng, với hai mục tiêu chính là giảm thiểu khối lượng tổng thể và chuyển vị ngang tối đa tại đỉnh giàn, trong khi vẫn tuân thủ các ràng buộc về ứng suất và ổn định. Để mô phỏng chính xác ứng xử phi tuyến của kết cấu, bao gồm phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu, nghiên cứu sử dụng phương pháp phân tích trực tiếp (Direct Analysis), thay vì các phương pháp phân tích tuyến tính truyền thống [1, 2]. Phân tích trực tiếp cho phép đánh giá đồng thời khả năng chịu tải và các đặc tính phi tuyến, cung cấp cơ sở đáng tin cậy cho việc tối ưu hóa [3]. Phần này trình bày chi tiết các thành phần của bài toán, bao gồm hàm mục tiêu, biến thiết kế, ràng buộc và quy trình phân tích.

2.1 Hàm mục tiêu

Bài toán bao gồm hai hàm mục tiêu:

Khối lượng tổng thể (W): Được tính bằng tổng khối lượng của các thanh giàn:

$$W = \rho \sum_{i=1}^{n_e} A_i L_i \quad (1)$$

trong đó: ρ là khối lượng riêng của thép (7850 kg/m^3), A_i là diện tích mặt cắt ngang của thanh thứ i , L_i là chiều dài thanh thứ i , và n_e là số thanh.

Chuyển vị ngang tối đa ($\delta_{\max}$): Là giá trị lớn nhất của chuyển vị ngang tại các nút đỉnh giàn, được xác định từ phân tích trực tiếp dưới tải trọng thiết kế. Mục tiêu này nhằm giảm thiểu độ biến dạng để đảm bảo độ cứng của giàn.

Hàm mục tiêu được biểu diễn:

Tối thiểu hóa: $f_1(x)=W, f_2(x)=\delta_{\max}$ (2)
với x là vector biến thiết kế, diện tích các nhóm thanh trong kết cấu giàn.

2.2 Điều kiện ràng buộc

Phân tích trực tiếp được sử dụng trong phân tích

ứng xử của kết cấu giàn khi chịu tải trọng. Tùy theo tổ hợp tải trọng cường độ hay sử dụng mà ta có điều kiện ràng buộc về cường độ và điều kiện ràng buộc về sử dụng. Đối với điều kiện ràng buộc về cường độ, phân tích trực tiếp được sử dụng để xác định khả năng chịu tải của toàn bộ công trình. Lúc này, sự an toàn của công trình được kiểm tra dưới công thức sau:

$$C^{sr} = 1 - \frac{R}{S} \leq 0, \quad (3)$$

trong đó: R và S là khả năng chịu tải của công trình và tổ hợp tải trọng tương ứng. Nếu điều kiện ràng buộc trên được thỏa mãn, ta sẽ có $R > S$ hay khả năng chịu tải của công trình lớn hơn áp lực do tải trọng gây ra.

Đối với tổ hợp tải trọng sử dụng, điều kiện về chuyển vị được minh họa theo công thức sau:

$$C_j^{cv} = \frac{|\Delta_j|}{|\Delta_j^u|} - 1 \leq 0, \quad (4)$$

trong đó: Δ_j và Δ_j^u là chuyển vị và giới hạn chuyển vị của nút thứ j.

2.3 Phương pháp xử lý điều kiện ràng buộc

Đối với bài toán tối ưu có điều kiện ràng buộc nêu trên, do tính phi tuyến cao của bài toán, các thuật toán tối ưu meta-heuristic được sử dụng. Tuy nhiên, các thuật toán này có đặc điểm chung là chúng được thiết lập để giải các bài toán tối ưu không có điều kiện ràng buộc. Do vậy, để có thể áp dụng các thuật toán này hiệu quả cho bài toán tối ưu có điều kiện ràng buộc, các kỹ thuật khác phải được tích hợp cùng. Trong nghiên cứu này, phương pháp hàm phạt sẽ được áp dụng do tính đơn giản của phương pháp. Nội dung của phương pháp là đối với mỗi một điều kiện ràng buộc bị vi phạm, hàm mục tiêu sẽ bị cộng thêm một giá trị phạt nhằm mục đích các hàm mục tiêu của phương án đó bị mang giá trị rất lớn và sẽ dần dần bị loại bỏ trong quá trình tối ưu. Lúc này, hàm mục tiêu trong công thức 2 được điều chỉnh như sau:

$$\text{Min } F_1'(X) = F_1(X) \times (1 + \alpha_{ad}\beta_1 + \alpha_{cv}\beta_2) \quad (5)$$

$$\text{Min } F_2'(X) = F_2(X) \times (1 + \alpha_{ad}\beta_1 + \alpha_{cv}\beta_2) \quad (6)$$

trong đó: $\beta_1 = \max(C^{cv}, 0)$, $\beta_2 = \sum_{j=1}^m \max(C_j^{cv}, 0)$, α_{ad} và α_{cv} là các tham số phạt tương ứng với các điều kiện ràng buộc về cường độ và chuyển vị.

3. Thuật toán tối ưu đa mục tiêu RDMO

Thuật toán RDMO (Rao-DE Multi-Objective) [29] là một phương pháp tối ưu hóa đa mục tiêu mới, được phát triển bằng cách kết hợp thuật toán Rao-1

[31] với Differential Evolution (DE) [15], nhằm giải quyết bài toán tối ưu hóa giàn thép phẳng với hai mục tiêu: giảm thiểu khối lượng và chuyển vị ngang tối đa. RDMO kế thừa tính đơn giản, không yêu cầu tham số điều khiển của Rao-1, đồng thời tận dụng khả năng khám phá không gian nghiệm của DE, kết hợp với các kỹ thuật sắp xếp không thống trị (non-dominated sorting) và khoảng cách đông đúc (crowding distance) từ NSGA-II [20] để duy trì tính đa dạng của tập nghiệm Pareto. Cấu trúc, cơ chế hoạt động và cải tiến của RDMO được tóm lược trong phần này dựa trên tài liệu [29].

3.1 Cấu trúc tổng quan

RDMO hoạt động theo quy trình vòng lặp, bắt đầu bằng việc khởi tạo ngẫu nhiên một tập hợp N cá thể (population), mỗi cá thể đại diện cho một vector biến thiết kế $x_i = [A_1, A_2, \dots, A_D]$. Các cá thể được đánh giá thông qua phân tích trực tiếp để tính hai hàm mục tiêu $f_1(x) = W$ và $f_2(x) = \delta_{\max}$. Sau đó, RDMO áp dụng chiến lược đột biến cải tiến từ Rao-1, kết hợp với cơ chế lai ghép của DE, để tạo ra các nghiệm mới. Tập nghiệm Pareto tối ưu được cập nhật liên tục dựa trên tiêu chí không thống trị và tính đa dạng.

3.2 Chiến lược đột biến cải tiến

Không giống Rao-1 chỉ sử dụng nghiệm tốt nhất (x_{best}) và tệ nhất (x_{worst}) trong quần thể, RDMO mở rộng bằng cách chọn nhiều nghiệm tốt ($x_{\text{best},k}$, $k=1,2,\dots,m$) từ tập hợp các cá thể có xếp hạng cao nhất trong quần thể (rank-0) và nghiệm tệ ($x_{\text{worst},l}$) từ tập hợp các cá thể có xếp hạng thấp nhất trong quần thể (rank-max). Công thức đột biến được cải tiến như sau:

$$x_{i,\text{new}} = x_i + r_1(x_{\text{best},k} - x_i) + r_2(x_i - x_{\text{worst},l}) \quad (7)$$

trong đó: r_1 và r_2 là các số ngẫu nhiên trong khoảng $[0, 1]$. Việc chọn các cá thể tốt nhất và kém nhất từ các tập hợp trên là phù hợp với sự hoạt động của bài toán tối ưu đa mục tiêu khi các cá thể có thể không tốt hơn nhau được trong cùng một đường Pareto (non-dominated).

3.3 Cơ chế lai ghép từ DE

RDMO tích hợp chiến lược lai ghép của DE để cải thiện khả năng khám phá không gian nghiệm. Sau khi tạo $x_{i,\text{new}}$ từ đột biến, một vector thử nghiệm u_i được hình thành bằng cách kết hợp x_i và $x_{i,\text{new}}$ theo tỷ lệ lai ghép CR:

$$u_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j,\text{new}} & \text{khi } \text{rand}_j \leq \text{CR} \text{ hoặc } j = j_{\text{rand}} \\ x_{i,j} & \text{ngược lại} \end{cases} \quad (8)$$

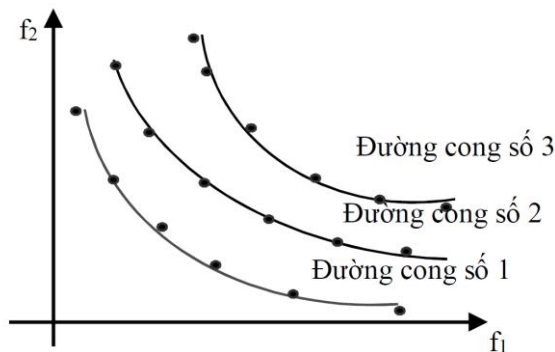
trong đó: j_{rand} là chỉ số ngẫu nhiên để đảm bảo ít nhất một thành phần được lấy từ $x_{i,new}$. Vector u_i sau đó được đánh giá bằng phân tích trực tiếp.

3.4 Quản lý tập nghiệm Pareto

Sau mỗi vòng lặp, RDMO sử dụng sắp xếp không thống trị để phân loại các cá thể thành các đường cong ưu thế (fronts) (Hình 1). Các cá thể trong mặt trận đầu tiên (non-dominated) được ưu tiên giữ lại. Để duy trì tính đa dạng, khoảng cách đồng đúc được tính cho mỗi cá thể:

$$d_i = \sum_{m=1}^2 \frac{f_m(x_{i+1}) - f_m(x_{i-1})}{f_m^{max} - f_m^{min}} \quad (9)$$

trong đó: f_m là giá trị hàm mục tiêu thứ m .



Hình 1. Minh họa các đường cong ưu thế trong sắp xếp không thống trị

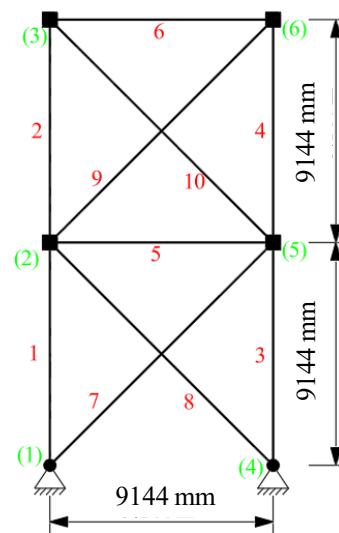
4. Ví dụ minh họa

Giàn phẳng 10 thanh, với cấu hình được minh họa trong Hình 2, sẽ là đối tượng nghiên cứu chính trong phần này. Vật liệu sử dụng là thép A992, có cường độ chảy $F_y = 344,7 \text{ MPa}$ và mô đun đàn hồi là $E = 200 \text{ GPa}$. Tải trọng tác dụng bao gồm tĩnh tải $DL = 150 \text{ kN}$, hoạt tải $LL = 100 \text{ kN}$ và tải trọng gió $W = 100 \text{ kN}$, được quy về các nút của giàn. Khối lượng riêng của thép được lấy là 7850 kg/m^3 . Biến thiết kế được chọn là diện tích mặt cắt ngang của các thanh giàn, nằm trong khoảng từ $645,16 \text{ mm}^2$ đến $64516,0 \text{ mm}^2$. Các ràng buộc bao gồm điều kiện cường độ ứng với hai tổ hợp tải trọng: $(1,6DL + 1,2LL)$ và $(1,2DL + 1,6W + 0,5LL)$; cùng với ràng buộc chuyển vị ứng với tổ hợp $(1,0DL + 0,7W + 0,5LL)$, yêu cầu chuyển vị ngang tại các nút không vượt quá $h/400$, với h là chiều cao tầng. Phần mềm PAAP [5] được sử dụng để phân tích ứng xử phi tuyến của giàn, nhằm đánh giá các điều kiện ràng buộc này. Các thông số của thuật toán RDMO bao gồm: số lượng cá thể trong quần thể (NP) là 50 và số vòng tiến hóa tối đa là 200.

3.5 Quy trình thuật toán

Quy trình của RDMO bao gồm các bước sau:

- 1) Khởi tạo ngẫu nhiên N cá thể x_i trong không gian thiết kế.
- 2) Đánh giá $f_1(x_i)$ và $f_2(x_i)$ bằng phân tích trực tiếp.
- 3) Thực hiện đột biến cải tiến và lai ghép để tạo u_i .
- 4) Cập nhật quần thể bằng cách so sánh u_i và x_i dựa trên tiêu chí không thống trị.
- 5) Sắp xếp không thống trị và tính khoảng cách đồng đúc để cập nhật tập lưu trữ cho chọn x_{best} và x_{worst} .
- 6) Lặp lại từ bước 3 cho đến khi đạt số vòng lặp tối đa T_{max} (ví dụ, 1000).

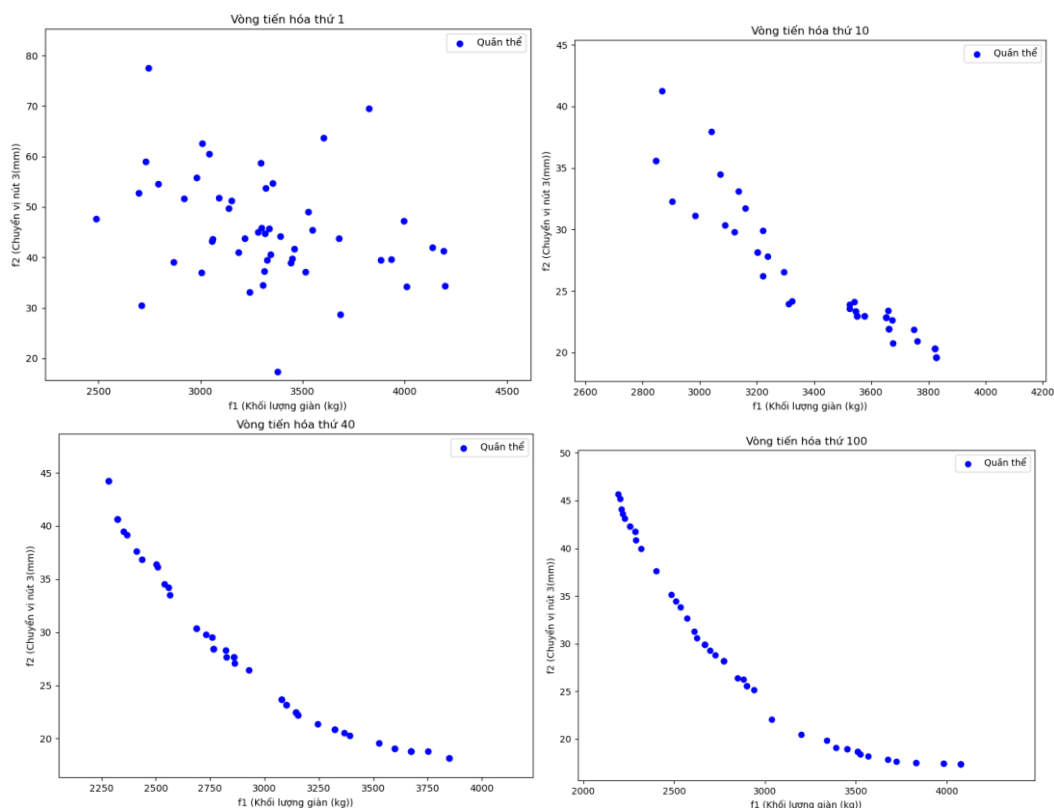


Hình 2. Ví dụ nghiên cứu: Dàn phẳng 10 thanh

Hình 3 thể hiện sự phân bố của cá thể trong quần thể trong quá trình tối ưu của chương trình. Hình vẽ cho thấy rằng ở thời đoạn đầu của quá trình tối ưu giá trị hàm mục tiêu của các cá thể đều lớn (lưu ý rằng giá trị này không xét đến phần vi phạm điều kiện ràng buộc). Các nghiệm trong quần thể còn phân thành các lớp khác nhau và có nghiệm thống trị nghiệm khác. Theo quá trình tối

ưu, các giá trị cả 2 hàm mục tiêu của các nghiệm đều tốt lên và dần hình thành nên đường cong Pareto, trong đó không có nghiệm nào thống trị nghiệm khác trong quần thể. Các nghiệm này vẫn

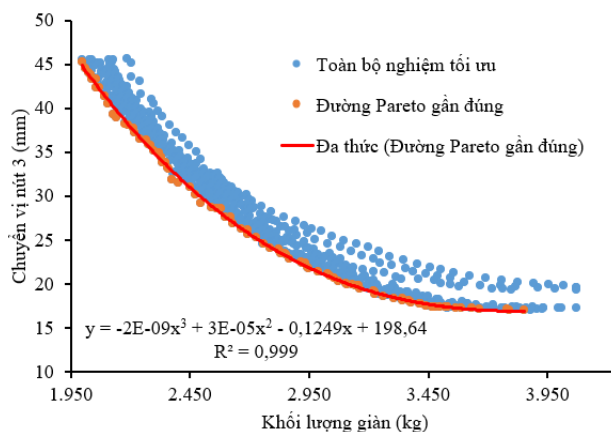
tiếp tục được nâng cao chất lượng và tạo nên quần thể tốt hơn nữa. Quần thể ở vòng lặp cuối cùng sẽ được lựa chọn là bộ nghiệm Pareto của lần chạy đó.



Hình 3. Quá trình tối ưu của chương trình

Do đặc tính ngẫu nhiên của các tham số sử dụng trong thuật toán, các thuật toán meta-heuristic sẽ cho ra các kết quả cuối cùng có sự khác nhau. Do vậy, để đánh giá chính xác hiệu quả của thuật toán, ta cần phải thực hiện nhiều lần chạy khác nhau và sử dụng chúng để đánh giá mức độ ổn định của chương trình. Trong nghiên cứu này, thuật toán RDMO sẽ được thực hiện với 20 lần khác nhau. Như trình bày ở trên, 20 lần này sẽ cho chúng ta 20 bộ nghiệm Pareto tương ứng cho mỗi lần chạy. Dựa trên 20 bộ nghiệm

này ta sẽ tìm bộ nghiệm Pareto tốt nhất và gọi đó là bộ nghiệm Pareto xấp xỉ. Kết quả tính toán được thể hiện trên Hình 4. Nhìn trên Hình 4 ta thấy rằng đường Pareto cuối cùng có thể xấp xỉ gần đúng như một đa thức bậc 3. Điều này thể hiện tính phi tuyến của đường Pareto, đồng thời nó cho thấy mối quan hệ ngược nhau giữa 2 hàm mục tiêu 1 và 2. Hay nói cách khác, để thỏa mãn đồng thời cả 2 mục tiêu đưa ra thì việc biểu diễn bài toán tối ưu dưới dạng tối ưu đa mục tiêu là phù hợp.



Hình 4. Đường cong Pareto xấp xỉ

Để so sánh sâu hơn về hiệu suất của thuật toán RDMO, 4 chỉ số đánh giá hiệu quả của thuật toán tối ưu đa mục tiêu được sử dụng: GD – thước đo đánh giá mức độ hội tụ của quần thể tới tập tối ưu Pareto, GD+ - là một biến thể của chỉ số GD có xem xét cả số lượng các mục tiêu mà được cải thiện trong quần thể, IGD+ - phản ánh cách mà các nghiệm trong quần thể có thể trải đều qua không gian mục tiêu, HV: đo lường kích thước của khu vực trong không gian mục tiêu mà các nghiệm trong quần thể chiếm giữ so với một điểm tham chiếu nhất định. Kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 1. Giá trị GD trung bình là 4,465 (độ lệch chuẩn 5,228) và GD+ trung bình 4,458 (độ lệch chuẩn 5,231), cho thấy mức độ gần của tập nghiệm Pareto với tập tham chiếu, dù dao động lớn giữa giá trị nhỏ nhất (0,267 và 0,244) và lớn nhất (18,617). Chỉ số IGD+ trung bình đạt 5,221 (độ lệch

chuẩn 5,767), phản ánh tính đa dạng và chất lượng phân bố nghiệm, với khoảng biến thiên từ 0,498 đến 23,608. Thể tích siêu khối (HV) trung bình là 63.389,880, dao động từ 57.336,900 đến 66.413,600 (độ lệch chuẩn 2.658,326), cho thấy RDMO tạo ra tập nghiệm có diện tích bao phủ tốt. Điểm neo 1 (khối lượng) trung bình 2.086,533 kg (độ lệch chuẩn 72,768) và điểm neo 2 (chuyển vị) trung bình 17,657 mm (độ lệch chuẩn 0,906) thể hiện sự ổn định trong việc tối ưu hóa hai mục tiêu. Nhìn chung, RDMO thể hiện hiệu suất đáng tin cậy, nhưng độ lệch chuẩn lớn ở các chỉ số GD và IGD+ cho thấy cần cải thiện tính ổn định giữa các lần chạy. Bảng 2 trình bày nghiệm tối ưu tìm được của chương trình tương ứng với nghiệm tối ưu có giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất (2 điểm neo) và nghiệm tối ưu có giá trị 2 hàm mục tiêu nằm trong mức độ trung bình của 2 điểm neo.

Bảng 1. Hiệu suất RDMO

Chỉ số đánh giá	Lớn nhất	Nhỏ nhất	Trung bình	Độ lệch chuẩn
GD	18,617	0,267	4,465	5,228
GD+	18,617	0,244	4,458	5,231
IGD+	23,608	0,498	5,221	5,767
HV	66.413,600	57.336,900	63.389,880	2.658,326
Điểm neo 1	2.278,000	1.996,92	2.086,533	72,768
Điểm neo 2	19,660	17,040	17,657	0,906

Bảng 2. Nghiệm tối ưu tìm được của giàn thép 10 thanh

Kết quả	Nghiệm tối ưu có hàm mục tiêu 1 nhỏ nhất	Nghiệm tối ưu có hàm mục tiêu 2 nhỏ nhất	Nghiệm tối ưu thông thường khác
Hàm mục tiêu 1 (kg)	1995,92	3851,27	2500,80
Hàm mục tiêu 2 (mm)	45,25	17,04	30,99
Biết thiết kế 1 (mm ²)	2544,62	1026,59	1065,53
Biết thiết kế 2 (mm ²)	1435,36	645,16	1320,21
Biết thiết kế 3 (mm ²)	6357,78	6451,60	6451,60
Biết thiết kế 4 (mm ²)	1811,77	6451,60	1884,02
Biết thiết kế 5 (mm ²)	2076,02	4348,51	3776,05
Biết thiết kế 6 (mm ²)	645,16	1351,53	779,08
Biết thiết kế 7 (mm ²)	2292,85	6451,60	4686,94
Biết thiết kế 8 (mm ²)	3045,97	4247,37	4506,31
Biết thiết kế 9 (mm ²)	980,17	6451,60	1293,19
Biết thiết kế 10 (mm ²)	2827,56	6451,60	3346,78

5. Kết luận

Nghiên cứu đã phát triển và ứng dụng thành công thuật toán RDMO, kết hợp Rao-1 và DE, để giải quyết bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu cho giàn thép phẳng, tập trung vào giảm thiểu khối lượng và

chuyển vị ngang tối đa. Sử dụng phân tích trực tiếp, RDMO mô phỏng chính xác ứng xử phi tuyến, đảm bảo tính an toàn và hiệu quả của thiết kế. Kết quả từ giàn 10 thanh cho thấy RDMO đạt được tập nghiệm Pareto đa dạng và chất lượng cao, với HV trung bình

63.389,880 và độ lệch chuẩn thấp ở các điểm neo (72,768 cho khối lượng, 0,906 cho chuyển vị). Dù vậy, độ lệch chuẩn lớn ở GD (5,228) và IGD+ (5,767) cho thấy cần cải thiện tính ổn định. RDMO hứa hẹn là công cụ hiệu quả cho thiết kế kỹ thuật dân dụng hiện đại. Tương lai, nghiên cứu sẽ cải thiện tính ổn định của RDMO, giảm độ lệch chuẩn GD và IGD+ bằng mô hình thay thế [27]. Ứng dụng sẽ mở rộng sang giàn thép không gian, tải động, và tích hợp học máy như XGBoost [28] để tăng tốc độ hội tụ và hiệu quả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Saka, M. P., Hasaebi, O., Eser, H., & Geem, Z. W (2024). *Historical evolution of structural optimization techniques for steel skeletal structures including industrial design applications*. Engineering Optimization, 1–61.
- [2] Kaveh, A., & Laknejadi, K (2011). *A hybrid multi-objective particle swarm optimization and decision making procedure for optimal design of truss structures*. Iranian Journal of Science and Technology, 35(C2): 137-154.
- [3] Truong, V. H., Tangaramvong, S., & Papazafeiropoulos, G (2024). *An efficient LightGBM-based differential evolution method for nonlinear inelastic truss optimization*. Expert Systems with Applications; 237(Part B): 121530.
- [4] Pham, H. A., Nguyen, D. X., & Truong, V. H (2021). *An efficient differential-evolution-based moving compensation optimization approach for controlling differential column shortening in tall buildings*. Expert Systems with Applications; 169: 114531.
- [5] Cao, T. S., Nguyen, T. T. T., Nguyen, V. S., Truong, V. H., & Nguyen, H. H (2023). *Performance of six metaheuristic algorithms for multi-objective optimization of nonlinear inelastic steel trusses*. Buildings, 13(4): 868.
- [6] Ho-Huu, V., Duong-Gia, D., Vo-Duy, T., Le-Duc, T., & Nguyen-Thoi, T (2018). *An efficient combination of multi-objective evolutionary optimization and reliability analysis for reliability-based design optimization of truss structures*. Expert Systems with Applications, 102: 262–272.
- [7] Li, L., & Khandelwal, K (2017). *Topology optimization of geometrically nonlinear trusses with spurious eigenmodes control*. Engineering Structures; 131: 324-344.
- [8] Thai, H. T., & Kim, S. E (2009). *Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic analysis of space steel structures*. Advances in Engineering Software, 40: 786-797.
- [9] Blandford, G (1996). *Progressive failure analysis of inelastic space truss structures*. Computers & Structures, 58: 981-990.
- [10] Truong, V. H., & Tangaramvong, S (2025). *An efficient method for nonlinear inelastic truss optimization based on improved k-nearest neighbor comparison and Rao algorithm*. Structures; 71: 108158.
- [11] Cao, T. S., Pham, H. A., & Truong, V. H (2025). *An efficient algorithm for multi-objective structural optimization problems using an improved pbest-based differential evolution algorithm*. Advances in Engineering Software; 197: 103752.
- [12] Yang, Y. B., & Shieh, M. S (1990). *Solution method for nonlinear problems with multiple critical points*. AIAA Journal, 28: 2110-2116.
- [13] Degertekin, S. O (2012). *Improved harmony search algorithms for sizing optimization of truss structures*. Computers & Structures, 92-93: 229-241.
- [14] Kaveh, A., & Mahdavi, V. R (2019). *Multi-objective colliding bodies optimization algorithm for design of trusses*. Journal of Computational Design and Engineering, 6(1): 49-59.
- [15] Storn, R., & Price, K (1997). *Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces*. Journal of Global Optimization, 11(4): 341–359.
- [16] Jenkins, W. M (1991). *Towards structural optimization via the genetic algorithm*. Computers & Structures, 40(5): 1321-1327.
- [17] Geem, Z. W., Kim, J. H., & Loganathan, G. V (2001). *A new heuristic optimization algorithm: Harmony search*. Simulation, 76(2): 60–68.
- [18] Kaveh, A., & Laknejadi, K (2013). *A hybrid evolutionary graph based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures*. Acta Mechanica; 224: 343-364.
- [19] Pham, H. A., Dang, V. H., Vu, T. C., & Nguyen, B. D (2024). *An Efficient k-NN-based Rao Optimization Method for Optimal Discrete Sizing of Truss Structures*. Applied Soft Computing, 154: 111373.
- [20] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T (2002). *A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(2): 182-197.
- [21] Kukkonen, S., & Lampinen, J (2005). *GDE3: the third evolution step of generalized differential evolution*.

- 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Edinburgh, UK, 443-450.
- [22] Zhang, Q., & Li, H (2007). *MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation; 11(6): 712–731.
- [23] Panagant, N., Pholdee, N., Bureerat, S., Yildiz, A. R., & Mirjalili, S (2021). *A comparative study of recent multi-objective metaheuristics for solving constrained truss optimisation problems*. Archives of Computational Methods in Engineering, 28: 4031–4047.
- [24] Tian, Y., Zheng, X., Zhang, X., & Jin, Y (2020). *Efficient large-scale multiobjective optimization based on a competitive swarm optimizer*. IEEE Transactions on Cybernetics, 50(8): 3696–3708.
- [25] Kaveh, A., & Ilchi Ghazaan, M (2020). *A new VPS-based algorithm for multi-objective optimization problems*. Engineering with Computers, 36(3): 1029–1040.
- [26] Eid, H. F., Garcia-Hernandez, L., & Abraham, A (2022). *Spiral water cycle algorithm for solving multi-objective optimization and truss optimization problems*. Engineering with Computers, 38(S2): 963–973.
- [27] Truong, V. H., Cao, T. S., & Tangaramvong, S (2024). *A robust machine learning-based framework for handling time-consuming constraints for bi-objective optimization of nonlinear steel structures*. Structures, 62: 106226.
- [28] Chen, T., & Guestrin, C (2016). *XGBoost: A scalable tree boosting system*. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, San Francisco, California, USA, August 13-17, 785-794.
- [29] Nguyen, M. C., Pham, H. A., & Truong, V. H (2024). *An efficient multi-objective algorithm based on Rao and differential evolution for solving bi-objective truss optimization*. Engineering Optimization, 1-31.
- [30] Truong, V. H., Tangaramvong, S., Pham, H. A., Nguyen, M. C., & Su, R (2025). *An efficient archive-based parameter-free multi-objective Rao-DE algorithm for bi-objective optimization of truss structures*. Computers & Structures, 308: 107647.
- [31] Rao, R. V (2020). *Rao algorithms: Three metaphor-less simple algorithms for solving optimization problems*. International Journal of Industrial Engineering Computations, 11: 107-130.
- [32] Rao, R. V., & Keesari, H. S (2021). *Rao algorithms for multi-objective optimization of selected thermodynamic cycles*. Engineering with Computers, 2021; 37(4): 3409-3437.