

MÔ HÌNH GIẢI TÍCH TÍNH TOÁN KHẢ NĂNG CHỊU LỰC CỦA CỘT NGẮN BÊ TÔNG CỐT THÉP CHỊU NÉN LỆCH TÂM ĐƯỢC GIA CƯỜNG BẰNG VẢI SỢI CÁC BON CFRP
ANALYTICAL MODEL FOR LOAD-CARRYING CAPACITY CALCULATION OF SHORT REINFORCED CONCRETE COLUMNS STRENGTHENED WITH CFRP SHEETS UNDER UNIAXIAL AND BIAXIAL ECCENTRIC LOADING

LÊ PHƯỚC LÀNH^{a,*}, NGUYỄN TRƯỜNG THẮNG^a, NGUYỄN TRUNG HIẾU^a

^aKhoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

*Tác giả đại diện: Email: lanhlp@huce.edu.vn

Ngày nhận 20/3/2026 Ngày sửa 28/3/2026, Chấp nhận 30/3/2026

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2026.vi.vol1-5>

Tóm tắt: Nghiên cứu này trình bày một mô hình giải tích tổng quát nhằm dự báo tải trọng cực hạn của cột ngắn bê tông cốt thép (BTCT) được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP khi chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên. Mô hình được phát triển trên cơ sở phân tích tiết diện phi tuyến, với giả thiết tiết diện phẳng và bám dính hoàn toàn giữa các vật liệu. Các quan hệ ứng suất - biến dạng phi tuyến của bê tông, cốt thép và CFRP được mô tả đầy đủ. Thuật toán gia tải kết hợp lặp hội tụ được áp dụng để xác định tải trọng cực hạn dựa trên các tiêu chí phá hoại vật liệu. Mô hình được kiểm chứng bằng dữ liệu thực nghiệm đã công bố, cho thấy độ chính xác cao trong dự đoán tải trọng cực hạn và cơ chế phá hoại. Ngoài ra, khảo sát tham số chỉ ra rằng độ lệch tâm là yếu tố chi phối chính, trong đó khả năng chịu lực suy giảm đáng kể khi độ lệch tâm tăng từ khoảng 0,3h đến 0,4h. Hiệu quả gia cường CFRP dọc gần như không đáng kể ở mức lệch tâm nhỏ (khoảng $\leq 0,1h$) nhưng biểu hiện rõ rệt ở các mức lệch tâm lớn hơn (khoảng $\geq 0,2h$).

Từ khóa: Cột BTCT, Gia cường CFRP, Nén lệch tâm, Mô hình giải tích, Khả năng chịu lực của cột.

Abstract: This study presents a general analytical model for predicting the ultimate strength of short reinforced concrete (RC) columns strengthened with carbon fiber-reinforced polymer (CFRP) sheets when subjected to uniaxial and biaxial eccentric loading. The model is developed within a nonlinear sectional analysis framework, incorporating the plane-strain assumption and full composite action among concrete, steel, and CFRP. The nonlinear stress – strain relationships of all constituent materials are fully integrated. An incremental – iterative solution procedure is employed to determine the ultimate load based on explicit material failure criteria. The proposed model

is validated against published experimental data, demonstrating high accuracy in predicting ultimate load-carrying capacity and failure modes. In addition, the parametric analysis indicates that the eccentricity ratio is the governing parameter, with the load-carrying capacity decreasing significantly as the eccentricity increases from approximately 0.3h to 0.4h. The effectiveness of longitudinal CFRP strengthening is negligible at low eccentricity levels (approximately $\leq 0.1h$), but becomes pronounced at higher eccentricities (approximately $\geq 0.2h$).

Keywords: RC columns, CFRP strengthening, Eccentric compression, Analytical model, Load-carrying capacity of columns.

1. Tổng quan

Cột bê tông cốt thép (BTCT) là cấu kiện chịu lực chính trong kết cấu công trình, đảm nhiệm chức năng truyền tải trọng xuống móng và góp phần quyết định đến độ ổn định tổng thể của công trình. Tuy nhiên, qua thời gian khai thác sử dụng, các cột BTCT có sự suy giảm khả năng chịu lực do chịu tác động của các tác nhân cơ học và yếu tố môi trường. Về nguyên tắc, nhóm các tác động cơ học cần phải được xem xét kỹ từ giai đoạn tính toán thiết kế công trình. Tuy nhiên, trên thực tế trong quá trình vận hành có thể phát sinh những tình huống chưa được dự báo hết như: (i) Sự cập nhật về các số liệu trong tiêu chuẩn thiết kế; (ii) Sự thay đổi công năng sử dụng; (iii) Tác động của thiên tai (gió bão, động đất) vượt quá giá trị nêu trong Quy chuẩn xây dựng; (iv) Tác động cháy, nổ... Bên cạnh đó, các tác động của nhóm yếu tố môi trường như nhiệt độ, độ ẩm, các yếu tố xâm thực có nguồn gốc hóa học (Clorua, CO₂,...). cũng có thể không được kể đến một cách triệt để trong quá trình tính toán thiết kế kết cấu BTCT. Khi kết cấu cột bị hư hỏng hoặc nhu cầu sử dụng cần tăng thêm tải trọng tác dụng lên cột,

phương án phá dỡ và xây dựng công trình mới là rất tốn kém về chi phí và thời gian. Khi đó, sửa chữa và gia cường kết cấu cột BTCT là một giải pháp có hiệu quả về mặt kinh tế và đảm bảo được khả năng chịu lực, trở thành một yêu cầu cấp thiết ngày nay.

Trong bối cảnh đó, vật liệu composite ra đời như một giải pháp gia cường hiệu quả, đặc biệt là vải sợi các bon (tiếng anh là Cacbor Fiber Reinforced Polymer, viết tắt CFRP) với thành phần cốt sợi các bon có cường độ chịu kéo rất cao, khối lượng nhẹ, khả năng chống ăn mòn tốt và dễ thi công tại hiện trường [1-2]. Đối với cột BTCT, các tấm vải sợi các bon CFRP có thể phát huy hai vai trò chính: (i) Hướng sợi gia cường theo phương ngang bao quanh cột (CFRP ngang) nhằm tạo hiệu ứng kiểm chế biến dạng nở hông của bê tông vùng nén, giúp tăng cường độ và độ dẻo; và (ii) Hướng sợi gia cường theo phương dọc theo trục cột (CFRP dọc), nâng cao khả năng chịu mô men uốn trong các trường hợp lệch tâm lớn. Ngày nay, xu hướng sử dụng tấm vải sợi các bon CFRP để phục hồi và nâng cấp khả năng chịu lực của cột BTCT đang ngày càng gia tăng, cả trong nghiên cứu và thực tiễn.

Để mô tả đúng ứng xử của cột BTCT chịu nén lệch tâm, trước hết cần phân biệt cột ngắn và cột mảnh, thiết đặt cơ sở cho việc lựa chọn mô hình tính toán phù hợp. Tham chiếu tiêu chuẩn Hoa Kỳ ACI 318 [3], cột được xem là cột ngắn nếu có tương quan chiều cao và kích thước tiết diện nằm trong phạm vi cho phép bỏ qua hiệu ứng độ mảnh của cột. Khi đó, ứng xử chịu lực của cột ngắn chủ yếu bị chi phối bởi phi tuyến vật liệu. Độ mảnh cho phép đối với cột ngắn trong các hệ khung có chuyển vị ngang đáng kể và không đáng kể được xác định lần lượt trong các biểu thức (1) và (2).

$$\frac{k \cdot l_u}{r} \leq 22 \quad (1)$$

$$\frac{k \cdot l_u}{r} \leq 34 - 12 \cdot \frac{M_1}{M_2} \quad (2)$$

trong đó: k là hệ số liên kết hai đầu cột; l_u là chiều dài của cột; r là bán kính quán tính của cột, M_1 và M_2 lần lượt là mô men nội lực tại đầu trên và đầu dưới của cột.

Nhiều nghiên cứu thực nghiệm đã được thực hiện nhằm đánh giá hiệu quả gia cường cột ngắn

BTCT chịu nén lệch tâm được gia cường bằng vải sợi các bon CFRP đơn hướng [4-6]. Các thí nghiệm trên cột BTCT cho thấy, hướng sợi CFRP dọc có thể làm tăng đáng kể khả năng chịu uốn và chuyển cơ chế phá hoại từ phá hoại nén sang phá hoại kéo trong trường hợp lệch tâm lớn; đồng thời, vải sợi các bon CFRP ngang bó quanh tiết diện giúp nâng cao sức kháng nén và độ dẻo trong vùng nén. Tuy nhiên, phần lớn các nghiên cứu này dừng lại ở mức mô tả thực nghiệm, chưa phát triển các mô hình giải tích tổng quát có khả năng dự báo tải trọng cực hạn và mô tả đầy đủ tương tác giữa lực dọc và mô men uốn theo hai phương chịu lực của cột.

Về mô hình tính toán lý thuyết, nghiên cứu của Mohamed El Sayed [7] năm 2011 đề xuất mô hình phân tích tiết diện cho cột ngắn với giới hạn chỉ áp dụng cho tiết diện vuông đặt cốt thép đối xứng, trong đó tiết diện ngang của cột được chia thành các lớp hữu hạn song song với trục trung hòa nhưng chỉ xét hướng sợi CFRP theo phương ngang bao quanh chu vi cột mà không xét thêm hướng sợi theo phương dọc cột. Đối với mặt cắt tiết diện chữ nhật và vuông không đối xứng chịu tải nén lệch tâm xiên, tác giả sử dụng phương trình đảo ngược được phát triển bởi Bresler [8]. Nghiên cứu của tác giả Manie và cộng sự [9] năm 2017 đưa ra quy trình thiết kế cho cột BTCT có tiết diện vuông được gia cường bằng vải sợi các bon CFRP chịu nén lệch tâm, quy trình thiết kế được đề xuất dựa trên biểu đồ tương tác phẳng (P-M) được tạo ra với độ chính xác phù hợp bằng cách kết nối tuyến tính 5 điểm. Cột lệch tâm xiên được tính toán bằng cách quy đổi về lệch tâm phẳng tương đương. Như vậy, trong các nghiên cứu trên, bài toán cột chịu nén lệch tâm xiên chủ yếu được xử lý thông qua các phương pháp quy đổi từ các trạng thái nén lệch tâm phẳng, chưa được giải trực tiếp trong một khuôn khổ phân tích hai phương đồng thời. Ngoài ra, phần lớn các nghiên cứu tập trung vào giải pháp gia cường cấu hình CFRP ngang tạo hiệu ứng kiểm chế biến dạng nở hông bê tông, trong khi vai trò của CFRP dọc trong việc tăng cường sức kháng uốn chưa được mô tả một cách hệ thống. Một số nghiên cứu gần đây đã mở rộng phân tích sang trường hợp cột chịu nén lệch tâm xiên, song thường giới hạn trong một số dạng tiết diện hoặc cấu hình CFRP nhất định. Do vậy, việc xây dựng một mô hình phân tích tiết diện

tổng quát cho cột ngắn gia cường CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên là rất cần thiết.

Một hạn chế khác của các mô hình giải tích hiện có là chưa mô tả rõ tiêu chí phá hoại vật liệu. Trong khi đó, đối với cột ngắn chịu nén lệch tâm, tải trọng cực hạn thực tế phụ thuộc một cách cơ hữu vào sự làm việc phi tuyến của bê tông, sự chảy dẻo của cốt thép và sự làm việc tới biến dạng hiệu quả của CFRP. Việc thiếu một thuật toán gia tải kết hợp lập hội tụ, gắn với các tiêu chí phá hoại rõ ràng, làm giảm khả năng dự báo chính xác tải trọng cực hạn và dạng hư hỏng của cột.

Từ các phân tích trên có thể thấy, mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu về cột BTCT ngắn được gia cường bằng vải sợi các bon CFRP, vẫn tồn tại những khoảng trống khoa học đáng kể, đó là: (i) Chưa có một mô hình giải tích tổng quát mô tả thống nhất cột ngắn gia cường CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên; (ii) Vai trò kết hợp của CFRP bó ngang theo chu vi cột và CFRP dọc theo trục cột trong bài toán này chưa được lượng hóa đầy đủ trong một khung phân tích phi tuyến; (iii) Đa số mô hình chưa gắn với quy trình gia tải kết hợp lập hội tụ và tiêu chí phá hoại vật liệu để dự báo chính xác tải trọng cực hạn; và (iv) Chưa có phân tích tham số có hệ thống làm rõ ảnh hưởng tương hỗ giữa độ lệch tâm và số lớp CFRP dọc đến ứng xử chịu lực của cột ngắn BTCT.

Từ những phân tích trên, nghiên cứu này được thực hiện với mục tiêu phát triển một mô hình giải tích tổng quát nhằm dự báo tải trọng cực hạn khi chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên của cột ngắn BTCT được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP đơn hướng. Mô hình được xây dựng trên cơ sở phân tích tiết diện phi tuyến với giả thiết tiết diện phẳng và bám dính hoàn toàn giữa các vật liệu, kết hợp các mô hình ứng suất – biến dạng phi tuyến của vật liệu. Cấu hình gia cường với hướng sợi theo phương ngang và theo phương dọc so với trục cột được xem xét. Phương pháp nghiên cứu sử dụng thuật toán gia tải kết hợp lập hội tụ để làm rõ tiến trình làm việc của tiết diện cho đến khi xảy ra phá hoại theo các tiêu chí vật liệu, từ đó xác định tải trọng cực hạn. Mô hình được kiểm chứng bằng dữ liệu thực nghiệm đã công bố, thiết lập cơ sở để mở rộng phân tích tham số và đánh giá ảnh hưởng của độ lệch tâm cũng như số lớp CFRP dọc đến khả năng chịu lực của cột. Kết quả nghiên cứu nhằm góp phần hoàn thiện cơ sở lý thuyết và cung cấp

công cụ phân tích tin cậy, phục vụ thiết kế và gia cường cột ngắn BTCT bằng tấm vải sợi các bon CFRP trong thực tiễn.

2. Mô hình giải tích tổng quát

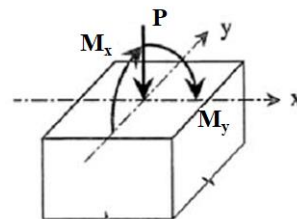
2.1 Giả thiết tính toán và mô tả hình học tiết diện

Xét một cột ngắn BTCT có tiết diện vuông hoặc chữ nhật được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP theo phương ngang, hoặc kết hợp cả phương ngang và phương dọc so với trục cột. Hệ trục xOy được đặt tại trọng tâm tiết diện, trục x và y song song với các cạnh tiết diện, trục z trùng với trục dọc thân cột. Lực dọc P và các mô men uốn quanh trục x và trục y lần lượt là M_x và M_y được đặt tại trọng tâm tiết diện theo quy ước dương chuẩn được thể hiện trên Hình 1.

Mô hình tính toán được dựa trên các giả thiết sau:

- Tiết diện phẳng trước và sau biến dạng: Biến dạng dọc trục phân bố tuyến tính trên tiết diện;
- Liên kết bám dính tuyệt đối giữa các lớp vật liệu, không xảy ra hiện tượng bong tách hoặc trượt tương đối giữa các lớp vật liệu;
- Vải sợi các bon CFRP chỉ làm việc chịu kéo. Trong tính toán, mọi vùng CFRP dọc có biến dạng nén được coi là không tham gia chịu lực;
- Bê tông chỉ làm việc chịu nén, vùng bê tông kéo có thể được bỏ qua trong tính toán;
- Với cột ngắn, cho phép bỏ qua hiệu ứng bậc hai của cấu kiện;
- Trạng thái ứng suất phẳng tại tiết diện, chỉ xét ứng suất dọc do tổ hợp nén-uốn đồng thời.
- Để đảm bảo hiệu quả gia cường, quan hệ ứng suất kéo nhỏ nhất trong tấm CFRP f_l và cường độ bê tông không bị kiểm chế biến dạng nở hông f'_{co} phải thỏa mãn điều kiện theo biểu thức sau:

$$f_l \geq 0,08 f'_{co} \tag{3}$$



Hình 1. Quy ước mặt cắt tiết diện

2.2 Quan hệ tương thích biến dạng

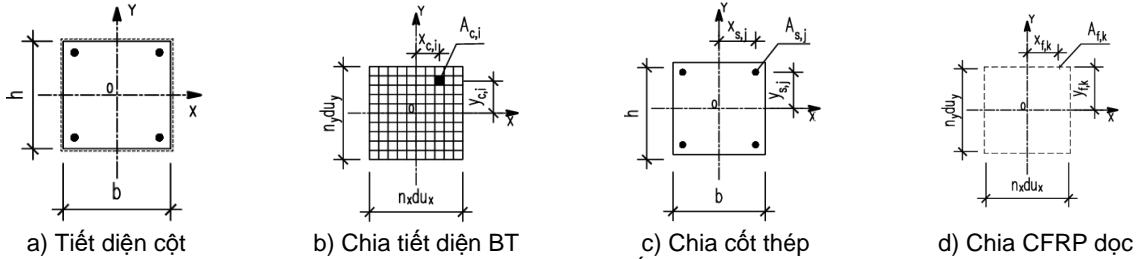
Dưới tác dụng của tổ hợp ngoại lực (P, M_x, M_y), tiết diện cột chịu trường biến dạng dọc $\varepsilon(x, y)$. Với giả thiết tiết diện phẳng, trường biến dạng được mô tả theo biểu thức (4).

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_o + \kappa_x \cdot y + \kappa_y \cdot x \quad (4)$$

Các trường hợp đặc biệt:

- Nén lệch tâm phẳng theo phương y : $\kappa_x = 0$ và $\kappa_y \neq 0$;
- Nén lệch tâm phẳng theo phương x : $\kappa_x \neq 0$ và $\kappa_y = 0$;
- Nén lệch tâm xiên: $\kappa_x \neq 0$ và $\kappa_y \neq 0$.

trong đó: ε_o là biến dạng tại tâm tiết diện; κ_x là độ cong quanh trục x ; κ_y là độ cong quanh trục y .



Hình 2. Rời rạc hóa tiết diện cột

Khi đó, phương trình cân bằng nội lực tại tiết diện như sau:

$$\begin{cases} P_{int} = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} \\ M_{x,int} = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_i + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot y_j + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} \cdot y_k \\ M_{y,int} = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot x_i + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot x_j + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} \cdot x_k \end{cases} \quad (5)$$

2.4 Mô hình ứng xử vật liệu

a. Vật liệu bê tông

Cột BTCT không gia cường CFRP ngang thì đường cong quan hệ ứng suất – biến dạng phi tuyến của bê tông sử dụng mô hình của Hognestad và cộng sự [10].

Khi gia cường cột BTCT bằng tấm vải sợi các bon CFRP bó quanh cột theo phương ngang so với trục cột, ảnh hưởng đến cường độ nén bê tông được xem xét bằng việc dùng mô hình quan hệ ứng suất – biến dạng của bê tông bị kiềm chế nở hông bởi vật liệu FRP của tác giả Lam và Teng [11, 12].

Tại vị trí tâm ($x_{c,i}, y_{c,i}$) của ô bê tông thứ i , biến dạng $\varepsilon_{c,i}$ được xác định theo (4), ứng suất của ô bê

Với mỗi bộ giá trị ($\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y$) biến dạng dọc của từng phân tố bê tông, cốt thép, CFRP dọc trên tiết diện được xác định theo biểu thức (4), sau đó được đưa vào mô hình ứng suất – biến dạng tương ứng của từng vật liệu.

2.3 Phương trình cân bằng nội lực

Tiết diện được chia thành các phân tố bê tông, phân tố CFRP dọc và các thanh cốt thép rời rạc được thể hiện trên Hình 2, trong đó:

- Bê tông: gồm n_c phân tố bê tông, mỗi phân tố có tọa độ ($x_{c,i}, y_{c,i}$), diện tích $A_{c,i}$ ứng suất $\sigma_{c,i}$,
- Cốt thép: gồm n_s thanh cốt thép, mỗi thanh có tọa độ ($x_{s,j}, y_{s,j}$), diện tích $A_{s,j}$ ứng suất $\sigma_{s,j}$,

CFRP dọc: gồm n_k phân tố CFRP, mỗi phân tố có tọa độ ($x_{f,k}, y_{f,k}$), diện tích $A_{f,k}$ và ứng suất $\sigma_{f,k}$.

tông thứ i là $\sigma_{c,i}$ được xác định theo biểu thức (6) đến (8).

$$\sigma_{c,i} = E_c \cdot \varepsilon_{c,i} - \frac{(E_c - E_2)^2}{4 \cdot f_{co}'} \quad \text{khi } 0 < \varepsilon_{c,i} \leq \varepsilon_t' \quad (6)$$

$$\sigma_{c,i} = f_{co}' + E_2 \cdot \varepsilon_{c,i} \quad \text{khi } \varepsilon_t' \leq \varepsilon_{c,i} \leq \varepsilon_{ccu} \quad (7)$$

$$\sigma_{c,i} = 0 \quad \text{khi } \varepsilon_{c,i} \leq 0 \quad (8)$$

trong đó: $E_2 = \frac{f_{cc}' - f_{co}'}{\varepsilon_{ccu}}$ và $\varepsilon_t' = \frac{2f_{co}'}{E_c - E_2}$; E_c là

mô đun đàn hồi của bê tông; ε_{ccu} là biến dạng cực hạn của bê tông tại thời điểm CFRP ngang bị đứt.

Cường độ chịu nén cực hạn f_{cc}' và biến dạng cực hạn ε_{ccu} của bê tông bị kiềm chế nở hông đề

xuất bởi Lam và Teng [12] được biểu diễn lần lượt trong các biểu thức (9) và (10).

$$f'_{cc} = f'_{co} + 3,3 \cdot k_{s1} \cdot f_l \quad (9)$$

$$\frac{\varepsilon_{ccu}}{\varepsilon_{co}} = 1,75 + 12 \cdot k_{s2} \cdot \frac{f_l}{f'_{co}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{fe}}{\varepsilon_{co}} \right)^{0,45} \quad (10)$$

Áp lực bó hiệu quả f_l do tấm CFRP tạo ra được xác định như sau:

$$f_l = \frac{2 \cdot E_f \cdot n \cdot t_f \cdot \varepsilon_{fe}}{D} \quad (11)$$

trong đó: n là số lớp CFRP; t_f là chiều dày của một lớp CFRP; ε_{fe} là biến dạng hiệu quả của CFRP.

Với cột có tiết diện hình chữ nhật có kích thước $b \times h$, đường kính quy đổi D được xác định như sau:

$$D = \sqrt{h^2 + b^2} \quad (12)$$

Hệ số kể đến hình dạng của kích thước, hình dạng cột đến hiệu ứng bó:

$$k_{s1} = \left(\frac{b}{h} \right)^2 \cdot \frac{A_e}{A_c} \quad (13)$$

$$k_{s2} = \left(\frac{h}{b} \right)^{0,5} \cdot \frac{A_e}{A_c} \quad (14)$$

Diện tích bó hiệu quả A_e được xác định như sau:

$$\frac{A_e}{A_c} = \frac{1 - \left[\frac{b}{h} \cdot (h - 2 \cdot r_c)^2 + \frac{h}{b} \cdot (b - 2 \cdot r_c)^2 \right] \cdot \rho_{sc}}{3 \cdot A_g \cdot (1 - \rho_{sc})} \quad (15)$$

trong đó: A_c là diện tích tiết diện cột, r_c là bán kính bo góc cột, ρ_{sc} là hàm lượng cốt thép dọc trong cột.

b. Vật liệu cốt thép

Quan hệ ứng suất – biến dạng của cốt thép được mô hình bằng quan hệ đàn – dẻo lý tưởng, tại vị trí $(x_{s,j}, y_{s,j})$ của thanh cốt thép thứ j , biến dạng $\varepsilon_{s,j}$ được xác định bằng biểu thức (4). Khi đó, ứng

suất trong thanh thép thứ j là $\sigma_{s,j}$ được xác định theo biểu thức từ 16 đến 18.

$$\sigma_{s,j} = E_s \cdot \varepsilon_{s,j} \quad \text{khi } |\varepsilon_{s,j}| \leq \varepsilon_y \quad (16)$$

$$\sigma_{s,j} = f_y \quad \text{khi } \varepsilon_y < \varepsilon_{s,j} \leq \varepsilon_{su} \quad (17)$$

$$\sigma_{s,j} = -f_y \quad \text{khi } -\varepsilon_{su} < -\varepsilon_{s,j} \leq -\varepsilon_y \quad (18)$$

c. Vật liệu vải sợi các bon CFRP dọc

Tấm vật liệu CFRP dọc như một vật liệu giòn, với tính chất bị phá hủy do đứt sợi đột ngột khi đạt đến biến dạng kéo cực hạn. Một mô hình vật liệu đàn hồi tuyến tính được sử dụng để giải thích sự đàn hồi của tấm CFRP dọc.

Tại vị trí tâm $(x_{f,k}, y_{f,k})$ của ô CFRP dọc thứ k , biến dạng $\varepsilon_{f,k}$ được tính theo biểu thức (4), ứng suất $\sigma_{f,k}$ trong CFRP dọc của ô thứ k được xác định theo biểu thức (19) đến (20).

$$\sigma_{f,k} = E_f \cdot \varepsilon_{f,k} \quad \text{khi } \varepsilon_{f,k} < 0 \quad (19)$$

$$\sigma_{f,k} = 0 \quad \text{khi } \varepsilon_{f,k} \geq 0 \quad (20)$$

Giới hạn $|\varepsilon_f| \leq \varepsilon_{fe}$

2.5 Quy trình tính toán và thuật toán giải

Mô hình giải tích được triển khai dưới dạng quy trình gia tải từng bước kết hợp lập hội tụ nhằm xác định trạng thái cân bằng tại mỗi mức tải và tìm tải trọng cực hạn P_u .

a. Gia tải từng bước

Tải trọng được tăng theo từng bước nhỏ ΔP theo biểu thức (21), mô men tương ứng M_x và M_y . Tại tải trọng $P_{k,req}$ với độ lệch tâm theo phương x và phương y lần lượt là e_x, e_y thì mô men tương ứng được xác định theo biểu thức (22) và (23).

$$P_{k,req} = P_{k-1,req} + \Delta P \quad (21)$$

$$M_{x,req} = P_{k,req} \cdot e_y \quad (22)$$

$$M_{y,req} = P_{k,req} \cdot e_x \quad (23)$$

b. Tiêu chí hội tụ

Tại mỗi bước tải, tìm bộ ẩn biến dạng tiết diện $(\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y)$ sao cho tiết diện đạt trạng thái cân bằng nội lực theo biểu thức sau:

$$\begin{cases} P_{int}(\kappa) = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} = P_{k,req} \\ M_{x,int}(\kappa) = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_i + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot y_j + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} \cdot y_k = M_{x,req} \\ M_{y,int}(\kappa) = \sum_{i=1}^n \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot x_i + \sum_j \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot x_j + \sum_k \sigma_{f,k} \cdot A_{f,k} \cdot x_k = M_{y,req} \end{cases} \quad (24)$$

c. Kiểm tra phá hoại và tải trọng cực hạn

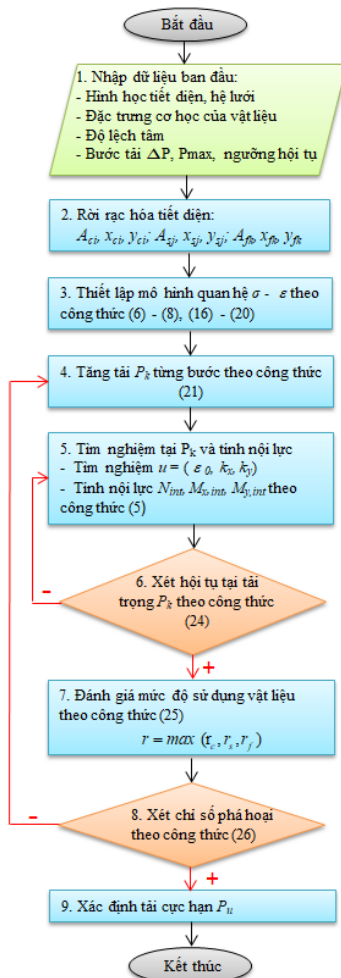
Sau khi đã có bộ ẩn biến dạng tiết diện tại bước tải k , tính biến dạng của từng phân tố theo biểu thức (4) và tính hệ số sử dụng vật liệu r của bê tông, cốt thép và CFRP dọc lần lượt là r_c, r_s và r_f như sau:

$$r_c = \max_i \left(\frac{\varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{ccu}} \right); r_s = \max_j \left(\frac{\varepsilon_{s,j}}{\varepsilon_{su}} \right); r_f = \max_k \left(\frac{\varepsilon_{f,k}}{\varepsilon_{fe}} \right) \quad (25)$$

Nếu hệ số sử dụng vật liệu $r = \max(r_c, r_s, r_f) < 1$ thì tiếp tục tăng tải lên bước tải thứ $(k + 1)$. Nếu $r = \max(r_c, r_s, r_f) \geq 1$ thì dừng tính toán và cấu kiện bị phá hoại chi phối bởi vật liệu nào có hệ số sử dụng vật liệu r tiến tới 1 đầu tiên. Khi đó, tải trọng cực hạn là tải trọng cần thỏa mãn đảm bảo điều kiện cân bằng và thỏa mãn điều kiện sau: $r = 1$ hoặc $|r - 1| \leq 10^{-6}$ (26)

d. Thuật toán giải

Để mô tả rõ quy trình tính toán của mô hình giải tích, một sơ đồ khối tổng quát được xây dựng nhằm tóm lược toàn bộ quá trình từ khởi tạo dữ liệu, gia tải từng bước, tìm nghiệm cân bằng đến kiểm tra phá hoại vật liệu để viết code và giải trên phần mềm MATLAB [13] được thể hiện chi tiết trên Hình 3.



Hình 3. Sơ đồ thuật toán tính cột BTCT gia cường bằng vải sợi các bon CFRP

3. Kiểm chứng mô hình

Mô hình giải tích đề xuất được kiểm chứng bằng cách so sánh các dự báo của mô hình với dữ liệu thực nghiệm từ ba nghiên cứu đã công bố, bao gồm các thí nghiệm trên cột ngắn BTCT gia cường vải sợi các bon CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên.

3.1 Mô tả chương trình thí nghiệm tham chiếu

Ba nghiên cứu thực nghiệm được sử dụng để kiểm chứng bao gồm:

- Thí nghiệm của tác giả Shaikh, F.U.A. và cs [14] năm 2019: Thí nghiệm này khảo sát các cột ngắn BTCT có kích thước tiết diện $b \times h \times L = 175 \times 175 \times 800$ (mm), bán kính bo góc $r_c = 20$ mm, cường độ nén bê tông ở tuổi 28 ngày là 47 MPa. Cốt thép dọc trong cột là 4Φ12, giới hạn chảy của cốt thép dọc là 500 MPa. Tấm CFRP có cường độ chịu kéo là 4300 MPa, mô đun đàn hồi là 234 GPa, chiều dày một lớp là 0,13 mm và biến dạng dài kéo đứt là 1,8 %. Các mẫu được thí nghiệm dưới tải nén lệch tâm phẳng với độ lệch tâm từ 25 mm đến 50 mm;
- Thí nghiệm của tác giả Al-Nimry, H. và cs [15] năm 2019: Thí nghiệm khảo sát các cột ngắn BTCT có kích thước $b \times h \times L = 200 \times 200 \times 1200$ (mm), bán kính bo góc là $r_c = 12,5$ mm, lớp bê tông bảo vệ là 12,5mm, cường độ nén bê tông ở tuổi 28 ngày là 47 MPa. Cốt thép dọc trong cột là 8Φ10, giới hạn chảy của cốt thép là 420 MPa. Tấm CFRP có cường độ chịu kéo là 4900 MPa, mô đun đàn hồi là 300 GPa, chiều dày một lớp là 0,166 mm và biến dạng dài kéo đứt là 2,1 %. Các mẫu được thử dưới tải nén lệch tâm phẳng với độ lệch tâm từ 35 mm đến 65 mm;
- Thí nghiệm của tác giả Tin, H.-X. và cs [16] năm 2022: Thí nghiệm khảo sát các cột ngắn BTCT có kích thước $b \times h \times L = 200 \times 200 \times 800$ (mm), bán kính bo góc $r_c = 20$ mm, cường độ nén bê tông ở tuổi 28 ngày là 49 MPa. Cốt thép dọc trong cột là 8Φ12, giới hạn chảy của cốt thép dọc là 350 MPa,

KẾT CẤU - CÔNG NGHỆ XÂY DỰNG

mô đun đàn hồi của cốt thép là 200 GPa. Tấm CFRP có cường độ chịu kéo là 3579 MPa, chiều dày một lớp là 0,166 mm, mô đun đàn hồi là 201 GPa và biến dạng dài kéo đứt là 2,08 %. Các mẫu

được thử dưới tải nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên với độ lệch tâm từ 25 mm đến 50 mm.

Chi tiết các mẫu thí nghiệm của các nghiên cứu trên được thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. Thông tin các mẫu cột kiểm chứng

Tác giả	Cột ngắn	Kích thước tiết diện (mm)		Độ lệch tâm e (mm)		Số lớp CFRP	
		b	h	e _x	e _y	N _{f,ngang}	N _{f,dọc}
Shaikh, F.U.A. và cs [14]	CF11	175	175	25	-	1	-
	CF21	175	175	25	-	2	-
	CF12	175	175	35	-	1	-
	CF13	175	175	50	-	1	-
	CF23	175	175	50	-	2	-
Al-Nimry, H. và cs [15]	C35-C	200	200	35	-	1	-
	C35-LC	200	200	35	-	1	1
	C50-C-A	200	200	50	-	1	-
	C50-LC-A	200	200	50	-	1	1
	C65-C-A	200	200	65	-	1	-
	C65-LC-A	200	200	65	-	1	1
Tin, H.-X. và cs [16]	11C25	200	200	25	-	1	1
	11C50	200	200	50	-	1	1
	10C50	200	200	50	-	-	1
	10C2525	200	200	25	25	-	1
	10C5050	200	200	50	50	-	1

3.2 Kết quả kiểm chứng

Cấu hình các mẫu cột kiểm chứng được tính toán theo mô hình giải tích được trình bày trong Mục 2 theo đúng thông số hình học, cấu hình gia cường, đặc tính vật liệu và độ lệch tâm của từng

mẫu (Bảng 1). Hai tiêu chí kiểm chứng chính được xem xét là tải trọng cực hạn (tải trọng cực hạn tính toán theo mô hình giải tích đề xuất $P_{u,cal}$; tải trọng cực hạn thực nghiệm $P_{u,exp}$) và dạng phá hủy. Kết quả kiểm chứng được thể hiện chi tiết trong Bảng 2.

Bảng 2. Kết quả kiểm chứng thực nghiệm và mô hình giải tích đề xuất

Tác giả	Cột ngắn	Tải cực hạn P_u (kN)		Tỷ lệ $P_{u,cal}/P_{u,exp}$	Dạng phá hủy	
		$P_{u,exp}$	$P_{u,cal}$		Thực nghiệm	Tính toán
Shaikh, F.U.A. và cs [14]	CF11	1229	1264	1,03	BT	BT
	CF21	1320	1359	1,03	BT	BT
	CF12	1098	1101	1,00	BT	BT
	CF13	840	898	1,07	BT	BT
	CF23	884	975	1,10	BT	BT
Al-Nimry, H. và cs [15]	C35-C	1814	1551	0,86	BT	BT
	C35-LC	1903	1559	0,82	BT	BT
	C50-C-A	1466	1288	0,88	BT	BT
	C50-LC-A	1436	1310	0,91	BT	BT
	C65-C-A	1194	1039	0,87	BT	BT
	C65-LC-A	1232	1100	0,89	BT	BT
Tin, H.-X. và cs [16]	11C25	1704	1574	0,92	BT	BT
	11C50	1164	1186	1,02	BT	BT
	10C50	1064	994	0,93	BT	BT
	10C2525	1096	1164	1,06	BT	BT
	10C5050	625	702	1,12	BT	BT

$$\text{Trung bình } MV = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{u,cal,i}}{P_{u,exp,i}} \right) = 0,97$$

$$\text{Độ lệch chuẩn } SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{u,cal,i}}{P_{u,exp,i}} - MV \right)^2} = 0,10$$

Ghi chú: - Đối với mẫu cột được gia cường CFRP ngang: "BT" là thời điểm bê tông đạt tới biến dạng cực hạn ϵ_{ccu} (tức thời điểm CFRP ngang bị đứt và ép vỡ bê tông);
- Đối với mẫu cột không được gia cường CFRP ngang: "BT" là ép vỡ bê tông.

Kết quả thống kê trong Bảng 2 cho thấy, tỷ số $P_{u,cal}/P_{u,exp}$ có giá trị trung bình 0,97 và độ lệch chuẩn 0,1. Điều này cho thấy mô hình giải tích đề xuất có độ chính xác và hợp lý, đồng thời mức độ phân tán của kết quả tương đối nhỏ. Cơ chế phá hoại của các mẫu thí nghiệm chủ yếu là bê tông vùng nén bị ép vỡ (CFRP ngang bị đứt), phù hợp với dạng phá hoại dự đoán bởi mô hình lý thuyết. Sự tương đồng này cho thấy mô hình không chỉ dự đoán hợp lý tải trọng cực hạn mà còn phản ánh đúng bản chất cơ học của quá trình phá hoại.

Tuy nhiên, một số mẫu cột riêng lẻ vẫn xuất hiện sai khác tương đối lớn. Điển hình, trong nghiên cứu của Al-Nimry, H. và cs [15] mẫu C35-LC (cấu hình gia cường gồm 01 lớp CFRP dọc và 01 lớp CFRP ngang) cho tỷ lệ $P_{u,cal}/P_{u,exp} = 0,82$. Trong khi đó, các mẫu cột BTCT có cấu hình gia cường CFRP tương tự trong nghiên cứu của Tin, H.-X. và cs [16] (mẫu 11C25 và 11C50) cho kết quả dự đoán phù hợp, với tỷ lệ $P_{u,cal}/P_{u,exp}$ xấp xỉ 1,0. Điều này cho thấy sự sai khác giữa kết quả tính toán và thực nghiệm không xuất hiện theo một xu hướng rõ rệt của mô hình giải tích đề xuất.

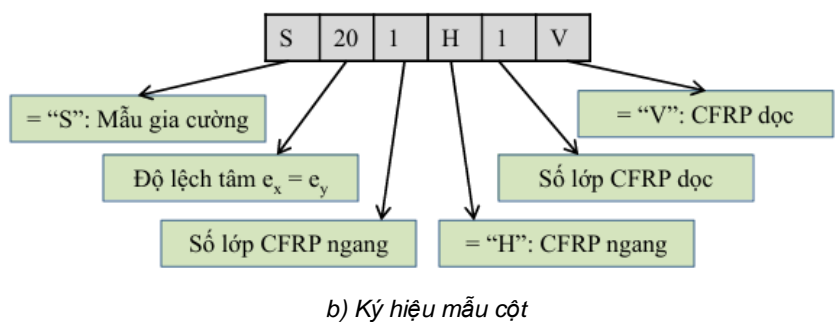
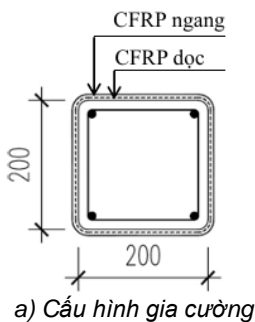
4. Khảo sát ảnh hưởng của CFRP dọc và độ lệch tâm

Mô hình giải tích trình bày trong Mục 2 và được kiểm chứng ở Mục 3 có thể áp dụng cho các tiết diện cột ngắn BTCT khác nhau, cũng như các cấu hình CFRP theo phương ngang và phương dọc với số lớp và chiều dày khác nhau. Trong phạm vi khảo sát này, phân tích tham số tập trung vào hai yếu tố chính là độ lệch tâm và số lớp CFRP dọc, trong khi CFRP ngang được giữ cố định nhằm phản ánh điều kiện gia cường điển hình trong thực tế.

Xét cột ngắn BTCT có kích thước $b \times h \times L = 200 \times 200 \times 800$ (mm), bán kính bo góc cột $r_c = 15$ mm, chiều dày lớp bê tông bảo vệ $c = 15$ mm, cường độ nén của bê tông không bị kiểm chế nở hông $f'_{co} = 25$ MPa, cốt thép dọc trong cột là 4Φ12 có giới hạn chảy cốt thép là 420 MPa, mô đun đàn hồi của cốt thép là 200 GPa. Cấu hình gia cường CFRP đơn hướng của cột gồm 01 lớp CFRP ngang (hướng sợi vuông góc với trục cột) và số lớp CFRP dọc (hướng sợi song song với trục cột) thay đổi $n_{f,dọc} = [0; 1; 2; 3]$ (lớp), chiều dày một lớp CFRP là 0,167 mm, mô đun đàn hồi của CFRP là 245 GPa và biến dạng dài kéo đứt là 1,6 %. Các mẫu cột được thử dưới tải nén lệch tâm xiên $e_x = e_y = e$, với e thay đổi $e = [0,1h; 0,2h; 0,3h; 0,4h]$. Tổ hợp thành ma trận gồm 16 mẫu cột khảo sát. Chi tiết thông tin về các mẫu cột khảo sát được thể hiện trong Bảng 3 và Hình 4.

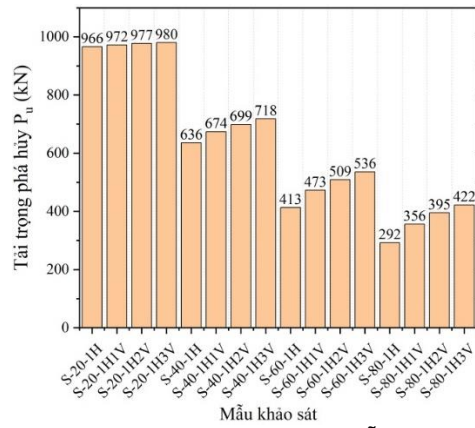
Bảng 3. Ma trận các mẫu cột khảo sát tham số

Độ lệch tâm e	Số lớp CFRP dọc $n_{f,dọc}$			
	0	1	2	3
0,1h	S-20-1H	S-20-1H1V	S-20-1H2V	S-20-1H3V
0,2h	S-40-1H	S-40-1H1V	S-40-1H2V	S-40-1H3V
0,3h	S-60-1H	S-60-1H1V	S-60-1H2V	S-60-1H3V
0,4h	S-80-1H	S-80-1H1V	S-80-1H2V	S-80-1H3V

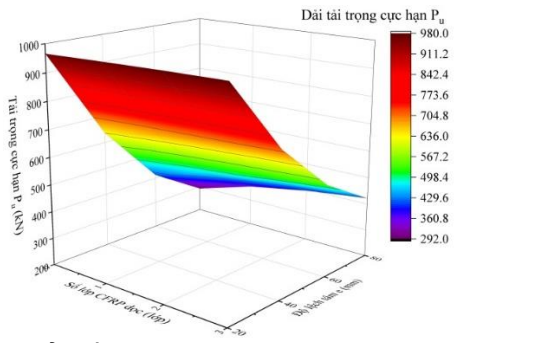


Hình 4. Thông tin mẫu cột khảo sát

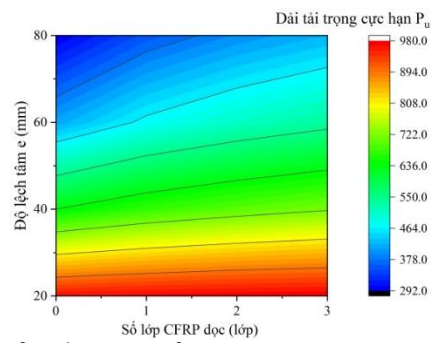
Các mẫu cột khảo sát trong Bảng 3 được tính toán theo mô hình giải tích đã được kiểm chứng ở Mục 3. Kết quả tính toán các mẫu cột được trình bày chi tiết trong các Hình 5 đến Hình 7.



Hình 5. Tải trọng cực hạn của các mẫu cột khảo sát



Hình 6. Biểu đồ mặt quan hệ giữa tải trọng cực hạn P_u - số lớp CFRP dọc $n_{f_dọc}$ - độ lệch tâm e



Hình 7. Biểu đồ đường đẳng trị quan hệ giữa tải trọng cực hạn P_u - số lớp CFRP dọc $n_{f_dọc}$ - độ lệch tâm e

Kết quả tính toán các mẫu cột được khảo sát cho thấy, tải trọng cực hạn P_u của cột chịu ảnh hưởng đồng thời của độ lệch tâm e và số lớp CFRP dọc $n_{f_dọc}$. Tuy nhiên, mức độ ảnh hưởng của hai tham số này là khác nhau và thể hiện rõ qua cả xu hướng và giá trị định lượng.

Trước hết, độ lệch tâm e đóng vai trò chi phối đối với khả năng chịu lực của cột. Khi e tăng từ $0,1h$ lên $0,4h$, tải trọng cực hạn giảm mạnh ở tất cả các cấu hình gia cường. Cụ thể, đối với mẫu không có CFRP dọc ($n_{f_dọc} = 0$), P_u giảm từ khoảng 966 kN xuống còn 292 kN, tương ứng mức suy giảm 69,8%. Tương tự, đối với trường hợp gia cường 03 lớp CFRP dọc ($n_{f_dọc} = 3$), P_u giảm từ khoảng 980 kN xuống 422 kN, tương ứng mức giảm 56,9%. Điều này cho thấy, ảnh hưởng bất lợi của độ lệch tâm là rất đáng kể. Xu hướng này phản ánh sự chuyển dịch từ trạng thái chịu nén gần đúng tâm sang trạng thái chịu nén – uốn, trong đó mô men uốn ngày càng chi phối khả năng chịu lực.

Xét theo từng mức độ lệch tâm, ảnh hưởng của số lớp CFRP dọc đến tải trọng cực hạn thể hiện sự phụ thuộc rõ rệt vào trạng thái làm việc của cấu kiện. Tại mức lệch tâm nhỏ ($e = 0,1h$), khi tăng số lớp CFRP dọc từ 0 lên 3 lớp, tải trọng cực hạn chỉ

tăng từ 966 kN lên 980 kN, tương ứng mức tăng 1,4%. Mức gia tăng này là không đáng kể, cho thấy CFRP dọc hầu như không được huy động trong điều kiện chịu nén gần đúng tâm. Khi đó, cơ chế gia cường chủ yếu đến từ CFRP ngang thông qua hiệu ứng kiểm chế biến dạng nở hông của bê tông.

Khi độ lệch tâm tăng lên $e = 0,2h$, ảnh hưởng của số lớp CFRP dọc đến tải trọng cực hạn được thể hiện rõ ràng. Khi sử dụng 01 lớp CFRP dọc, tải trọng cực hạn tăng từ 636 kN lên 674 kN, tương ứng mức tăng 6,0% so với mẫu không gia cường CFRP dọc. Khi tăng lên 02 lớp CFRP dọc, giá trị P_u đạt 699 kN, tương ứng mức tăng 9,9%. Với 03 lớp CFRP dọc, tải trọng cực hạn đạt 718 kN, tương ứng mức tăng 12,9% so với trường hợp không có CFRP dọc. Điều này cho thấy sự xuất hiện của vùng kéo có ý nghĩa trong tiết diện, bắt đầu kích hoạt khả năng chịu lực của CFRP dọc.

Trong các trường hợp lệch tâm lớn ($e = 0,3h$ và $e = 0,4h$), hiệu quả của CFRP dọc trở nên rất rõ rệt. Tại $e = 0,3h$, tải trọng cực hạn tăng từ 413 kN lên 536 kN khi số lớp CFRP dọc tăng từ 0 lên 03 lớp, tương ứng mức tăng 29,8%. Tương tự, tại $e = 0,4h$, giá trị P_u tăng từ 292 kN lên 422 kN, tương ứng mức tăng lên tới 44,5%, cho thấy hiệu quả của CFRP dọc tăng lên khi độ lệch tâm tăng.

Điều này là do trong trạng thái cột lệch tâm lớn, vùng kéo trong tiết diện phát triển mạnh, khiến CFRP dọc tham gia trực tiếp vào việc chịu kéo và đóng vai trò tương tự như cốt chịu lực ngoài, từ đó cải thiện đáng kể khả năng chịu lực tổng thể của cột.

Kết quả từ biểu đồ bề mặt 3D (Hình 6) và biểu đồ đường đẳng trị (Hình 7) cũng củng cố nhận định trên. Độ dốc của bề mặt theo phương độ lệch tâm lớn hơn đáng kể so với theo phương số lớp CFRP dọc, cho thấy độ nhạy của tải cực hạn P_u đối với độ lệch tâm e là lớn hơn. Đồng thời, các đường đẳng trị trong Hình 7 gần như song song với trục số lớp CFRP dọc $n_{f,dọc}$ tại vùng e nhỏ, nhưng nghiêng rõ rệt khi e tăng, phản ánh sự gia tăng vai trò của CFRP dọc trong trạng thái nén - uốn chi phối và uốn chi phối.

Từ các kết quả phân tích trên, có thể nhận thấy tồn tại một ngưỡng lệch tâm mà tại đó hiệu quả làm việc của CFRP dọc bắt đầu trở nên đáng kể. Dưới ngưỡng này (xấp xỉ $e \leq 0,1h$), việc gia tăng số lớp CFRP dọc không mang lại hiệu quả rõ rệt. Ngược lại, khi $e \geq 0,3h$, CFRP dọc đóng vai trò quan trọng trong việc nâng cao khả năng chịu lực của cột, với mức tăng có thể đạt đến trên 40%. Nhận xét này có ý nghĩa quan trọng trong thực tiễn thiết kế, cho phép lựa chọn cấu hình gia cường hợp lý tùy theo trạng thái làm việc của cấu kiện cột BTCT.

5. Kết luận

Trong khuôn khổ của nghiên cứu này, một số kết luận được rút ra như sau:

- Một mô hình giải tích tổng quát được phát triển dựa trên phân tích vật liệu phi tuyến, tiết diện phi tuyến với giả thiết tiết diện phẳng và bám dính hoàn toàn giữa các vật liệu để dự báo tải trọng cực hạn khi chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên của cột ngắn BTCT được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP;

- Độ lệch tâm là tham số chi phối chính đến khả năng chịu lực của cột. Khi độ lệch tâm tăng từ khoảng $0,3h$ đến $0,4h$, khả năng chịu lực suy giảm mạnh và cấu kiện chuyển sang trạng thái làm việc uốn chi phối;

- Hiệu quả gia cường của CFRP dọc phụ thuộc trực tiếp vào mức độ lệch tâm. Cụ thể, CFRP dọc hầu như không phát huy hiệu quả đáng kể khi $e \leq 0,1h$, trong khi bắt đầu có ảnh hưởng rõ rệt khi $e \geq 0,2h$ và trở nên hiệu quả cao khi $e \geq 0,3h$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] ACI Committee 440 (1996). *State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures*, ACI 440R-96. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, USA.
- [2] ISIS Canada Corporation (2007). *Reinforced Concrete Structures with Fibre Reinforced Polymers – Design Manual No. 3*. University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada.
- [3] ACI (2011). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318M-11)*. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, USA.
- [4] Sadeghian, P., Rahai, A.R., Ehsani, M.R. (2010). *Experimental study of rectangular RC columns strengthened with CFRP composites under eccentric loading*. Journal of Composites for Construction, 14(4):443-450.
- [5] Hadi, M.N.S., Widiarsa, I.B.R. (2012). *Axial and flexural performance of square RC columns wrapped with CFRP under eccentric loading*. Journal of Composites for Construction, 16(6):640-649.
- [6] El Maaddawy, T. (2008). *Behavior of corrosion-damaged RC columns wrapped with FRP under combined flexural and axial loading*. Cement and Concrete Composites, 30(6):524-534.
- [7] El Sayed, M.G.M., El Maaddawy, T. (2011). *Analytical model for prediction of load capacity of RC columns confined with CFRP under uniaxial and biaxial eccentric loading*. Materials and Structures, 44(1):299-311.
- [8] Bresler B (1960). *Design criteria for reinforced concrete columns under axial load and biaxial bending*. ACI J, 57(11):481-490.
- [9] Manie, S., Jami, E., Azarian, Z. (2017). *Simplified design of FRP-confined square RC columns under bi-axial bending*. Buildings, 7(3):74.
- [10] Hognestad E., Hanson N.W., McHenry D. (1955). *Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design*. ACI Journal, 52(12):455-479.
- [11] Lam, L., & Teng, J. G. (2003). *Design-oriented stress-strain model for FRP-confined concrete*. Construction and Building Materials, 17(6):471-489.
- [12] Lam, L., & Teng, J. G. (2003). *Design-oriented stress-strain model for FRP-confined concrete in rectangular columns*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 22(13):1149-1186.
- [13] MATLAB. (2023). MATLAB - R2023a.
- [14] Shaikh, F.U.A., Alishahi, R. (2019). *Behaviour of CFRP wrapped RC square columns under eccentric compressive loading*. Structures, 20:309-323.
- [15] Al-Nimry, H., Neqresh, M. (2019). *Confinement effects of unidirectional CFRP sheets on axial and bending capacities of square RC columns*. Engineering Structures, 196:109329.
- [16] Tin, H.-X., Thuy, N.-T., Seo, S.-Y. (2022). *Structural behavior of RC column confined by FRP sheet under uniaxial and biaxial Load*. Polymers, 14(1):75.