

ẢNH HƯỞNG CỦA NỀN NHÁM LĂNG TRỤ CHỮ NHẬT ĐẾN TRƯỜNG VẬN TỐC TRONG NƯỚC NHẢY TỰ DO

EFFECT OF RECTANGULAR PRISM ROUGH BEDS ON FLOW VELOCITY FIELDS IN FREE HYDRAULIC JUMP

TRỊNH CÔNG TÝA*

^aKhoa Xây dựng Công trình thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

*Tác giả đại diện: Email: tytc@huce.edu.vn

Ngày nhận 06/02/2026, Ngày sửa 28/3/2026, Chấp nhận 30/3/2026

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2026.vi.vol1-4>

Tóm tắt: Nghiên cứu này tập trung làm rõ ảnh hưởng của nền nhám lăng trụ chữ nhật đến đặc trưng trường vận tốc dòng chảy trong khu vực nước nhảy tự do (với số Froude $5,65 \leq Fr_1 \leq 9,0$), thông qua phân tích và hậu xử lý chi tiết các kết quả mô phỏng động lực học chất lỏng (CFD). Mục tiêu nghiên cứu là xác định biên dạng vận tốc dòng chủ, đánh giá phân bố vận tốc gần đáy, phân tích sự dịch chuyển vị trí vận tốc cực đại theo chiều sâu dòng chảy và làm rõ tính không đồng nhất của trường vận tốc dưới tác động của đáy nhám. Kết quả cho thấy nền nhám làm suy giảm đáng kể vận tốc gần đáy, hình thành các vùng vận tốc thấp liên tục dọc theo đáy nhám và thúc đẩy sự phát triển của lớp biên rối. Biên dạng vận tốc chuẩn hóa xuất hiện sai lệch rõ rệt so với trường hợp nền nhẵn, trong khi vị trí vận tốc cực đại có xu hướng dịch chuyển lên cao hơn theo chiều sâu dòng chảy. Trường vận tốc thể hiện sự phân bố không đồng nhất cao, gắn liền với các vùng tách dòng và tái nhập dòng cục bộ xung quanh các phần tử nhám lăng trụ chữ nhật. Những kết quả này cung cấp cách tiếp cận dựa trên trường vận tốc để lý giải cơ chế tiêu năng trong nước nhảy, đồng thời bổ sung cơ sở khoa học định lượng phục vụ thiết kế và tối ưu hóa bề tiêu năng sử dụng nền nhám lăng trụ chữ nhật.

Từ khóa: nước nhảy tự do; nền nhám lăng trụ chữ nhật; biên dạng vận tốc dòng chủ; cấu trúc dòng chảy gần đáy nhám; hậu xử lý CFD.

Abstract: This study aims to elucidate the influence of rectangular prism rough beds on the flow velocity field characteristics within free hydraulic jumps (with Froude number $5,65 \leq Fr_1 \leq 9,0$) through detailed analysis and post-processing of Computational Fluid Dynamics (CFD) simulation results. The objectives are to determine the main flow velocity profiles, evaluate the near-bed velocity distribution, analyze the vertical shift of the maximum velocity location, and clarify the spatial non-uniformity of the velocity field induced by bed roughness. The results demonstrate that the presence of rectangular prism roughness significantly reduces near-bed

velocities, promotes the formation of continuous low-velocity zones along the rough bed, and enhances the development of the turbulent boundary layer. The normalized velocity profiles exhibit pronounced deviations from those observed over smooth beds, while the position of maximum velocity tends to shift upward within the flow depth. The velocity field shows a high degree of spatial heterogeneity, closely associated with local flow separation and reattachment around the rectangular prism roughness elements. These findings provide a velocity-field-based interpretation of energy dissipation mechanisms in hydraulic jumps and contribute quantitative insights for the hydraulic design and optimization of stilling basins employing rectangular prism rough beds.

Keywords: free hydraulic jump; rectangular prism rough beds; main flow velocity profiles; near-rough bed flow structure; CFD post-processing.

1. Đặt vấn đề

Nước nhảy là một hiện tượng đặc trưng của thủy lực dòng chảy hở, giữ vai trò quan trọng đối với việc tiêu tán năng lượng trong công trình thủy. Hiện tượng này phát sinh khi dòng chảy chuyển tiếp đột ngột từ chế độ chảy xiết sang chế độ chảy êm, thường xảy ra ở hạ lưu các công trình như đập tràn, cống điều tiết, kênh dẫn và công trình xả lũ, kèm theo sự suy giảm đáng kể động năng của dòng chảy. Với hiệu quả tiêu năng cao, tính ổn định trong vận hành và khả năng chủ động khống chế trong thiết kế, nước nhảy được khai thác rộng rãi trong các bề tiêu năng nhằm bảo vệ nền móng và kết cấu công trình, đồng thời giảm thiểu nguy cơ xói lở khu vực hạ lưu. Do đó, đây được xem là một giải pháp kỹ thuật nền tảng trong thiết kế, vận hành các công trình tháo lũ và điều tiết dòng chảy trong thực tế [2-4].

Trong điều kiện nền trơn (nhẵn), các đặc trưng cơ bản của nước nhảy như quan hệ độ sâu liên hợp y_2 , chiều dài nước nhảy L_j , mức tiêu năng và hình thái vùng nước xoáy đã được nghiên cứu tương đối đầy

đủ thông qua các công trình kinh điển và các nghiên cứu thực nghiệm [5-7]. Tuy nhiên, bề tiêu năng với nền nhám thường đòi hỏi chiều dài lớn để đảm bảo hiệu quả tiêu năng, dẫn đến tăng chi phí xây dựng và hạn chế khả năng bố trí trong điều kiện mặt bằng chật hẹp. Ngoài ra, vận tốc lớn sát đáy ở cuối vùng nước nhảy trên nền nhám có thể gây xói cục bộ, ảnh hưởng đến độ bền kết cấu của công trình.

Để khắc phục những hạn chế nêu trên, việc sử dụng nền nhám (đáy nhám) trong bề tiêu năng đã được nghiên cứu và ứng dụng như một giải pháp hiệu quả nhằm tăng cường tiêu tán năng lượng, hạ thấp độ sâu liên hợp sau nước nhảy y_2 , rút ngắn chiều dài nước nhảy L_j và giảm vận tốc gần đáy [8-13]. Các đặc trưng hình học của phần tử nhám có khả năng tạo ra các vùng tách dòng, xoáy cục bộ và tăng cường trao đổi động lượng trong lớp biên ở đáy δ , từ đó làm biến đổi đáng kể cấu trúc dòng chảy trong khu vực nước nhảy.

Trong số các dạng nhám đã được nghiên cứu, các phần tử nhám dạng khối bố trí phân tán, hay dạng lăng trụ hình sin, tam giác, hình thang, lăng trụ chữ nhật,... đã cho thấy hiệu quả rõ rệt trong việc cải thiện khả năng tiêu năng của nước nhảy [1, 9, 14-16]. Tuy nhiên, phần lớn các nghiên cứu trước đây chủ yếu tập trung đánh giá các chỉ tiêu tổng thể như chiều dài nước nhảy, độ sâu sau nước nhảy hoặc hiệu quả tiêu năng, trong khi trường vận tốc chi tiết bên trong nước nhảy, đặc biệt là phân bố vận tốc gần đáy và cơ chế tương tác giữa dòng chủ với các phần tử nhám hình học, vẫn chưa được làm rõ một cách hệ thống.

Gần đây, một số nghiên cứu đã bước đầu áp dụng mô phỏng số (CFD) trong phân tích hiện tượng nước nhảy trên nền nhám, các kết quả thu được chủ yếu vẫn dừng lại ở mức đánh giá tổng thể hoặc so sánh hiệu quả tiêu năng giữa các dạng cấu hình nhám khác nhau. Đối với trường hợp nền nhám lăng trụ chữ nhật [1], một dạng hình học có ưu điểm đơn giản, ổn định và thuận lợi trong thi công thực tế, các nghiên cứu chuyên sâu về đặc trưng trường vận tốc trong điều kiện nước nhảy tự do, ổn định (nước nhảy hoàn chỉnh) vẫn còn hạn chế. Đặc biệt, các vấn đề mang tính bản chất của dòng chảy như quy luật phân bố vận tốc vùng gần đáy, sự dịch chuyển vị trí vận tốc cực đại theo chiều sâu, cũng như cơ chế hình thành và phát triển của các vùng vận tốc thấp dọc theo bề mặt đáy nhám, hầu như chưa được phân tích một cách định lượng và có hệ thống. Theo tài liệu [1], đây là khoảng trống nghiên cứu quan trọng, cần

được tiếp tục làm rõ nhằm hoàn thiện cơ sở lý thuyết và nâng cao độ tin cậy trong ứng dụng thực tiễn. Ngoài ra, các đặc trưng này còn có ý nghĩa thực tiễn quan trọng trong đánh giá và kiểm soát hiện tượng xói lở tại khu vực bề tiêu năng.

Bên cạnh đó, sự phát triển nhanh chóng của các phương pháp tính toán trong lĩnh vực động lực học chất lưu (CFD) và khoa học máy tính trong những năm gần đây đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc nghiên cứu chi tiết cấu trúc dòng chảy trong hiện tượng nước nhảy với độ tin cậy cao [12, 14, 16, 17]. Thông qua quá trình khai thác và hậu xử lý dữ liệu mô phỏng, có thể xác định và phân tích một cách có hệ thống các đặc trưng của trường vận tốc, bao gồm dòng chủ, phân bố vận tốc vùng gần đáy cũng như các đặc tính rối trong phạm vi nước nhảy. Cách tiếp cận này cho phép tiếp cận sâu hơn bản chất động lực học của dòng chảy mà không phụ thuộc hoàn toàn vào việc mở rộng thí nghiệm vật lý. Nhờ đó, có thể hạn chế việc sử dụng các thiết bị đo vận tốc, từ các phương pháp truyền thống như ống Pitot [9] đến các kỹ thuật hiện đại như đo vận tốc bằng ảnh hạt (PIV) [18] hay đo vận tốc Doppler âm thanh (ADV) [19], qua đó góp phần giảm đáng kể chi phí và nguồn lực thực nghiệm.

Xuất phát từ các tồn tại đã nêu, nghiên cứu này tập trung phân tích ảnh hưởng của nền nhám lăng trụ chữ nhật đến đặc trưng trường vận tốc trong điều kiện nước nhảy tự do, ổn định. Cách tiếp cận được thực hiện thông qua việc khai thác và hậu xử lý chi tiết các kết quả mô phỏng CFD, sử dụng bộ dữ liệu đã được công bố của nhóm tác giả T. C. Tý và nnk [1] về nước nhảy hoàn chỉnh trên đáy nhám dạng này. Trên cơ sở đó, nghiên cứu hướng tới làm rõ quy luật biến đổi của biên dạng vận tốc dòng chủ, đặc điểm phân bố vận tốc khu vực gần đáy, cũng như cấu trúc dòng chảy trong vùng nước nhảy dưới tác động của các tham số hình học của nền nhám. Kết quả kỳ vọng góp phần hoàn thiện cơ sở khoa học về nước nhảy trên đáy nhám, đồng thời cung cấp luận cứ phục vụ nâng cao hiệu quả thiết kế hay tối ưu hóa quy mô bề tiêu năng trong thực tiễn công trình thủy lợi.

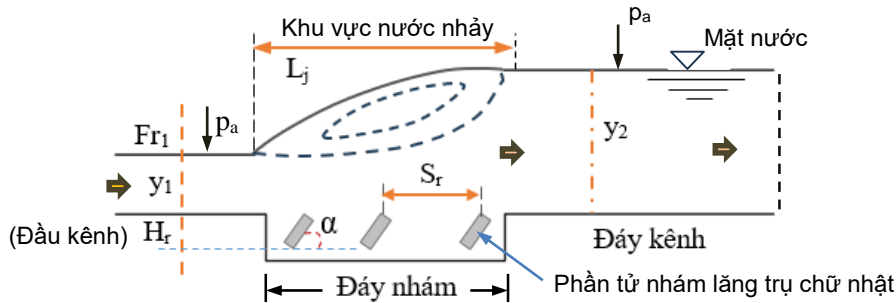
2. Cơ sở dữ liệu và phương pháp nghiên cứu

2.1 Cơ sở dữ liệu nghiên cứu

Cơ sở dữ liệu sử dụng trong nghiên cứu này được khai thác từ các kết quả mô phỏng động lực

học chất lỏng đã được công bố và kiểm chứng trước đó đối với hiện tượng nước nhảy tự do trên nền nhám lăng trụ chữ nhật của nhóm tác giả T. C. Tý và nnk [1]. Các kết quả mô phỏng được xây dựng cho dòng chảy không nén được, xét đến ảnh hưởng của nền nhám bao gồm các phần tử lăng trụ chữ nhật bố trí đều trên đáy kênh. Mỗi mô hình số đã được thiết lập với các điều kiện biên ở đầu kênh (độ sâu dòng chảy xiết y_1 , Fr_1) và hạ lưu là mực nước y_2 thứ dần để đảm

bảo sự hình thành nước nhảy ổn định, tự do (Hình 1). Với 280 trường hợp mô phỏng số đã được thực hiện, tương ứng với các điều kiện dòng chảy xiết đầu kênh và đặc điểm hình học của nền nhám lần lượt cho ở Bảng 1 và Hình 1. Kết quả thu được từ mô phỏng số về đặc trưng chính của nước nhảy tự do có liên quan trực tiếp tới quy mô công trình bề tiêu năng được xác định với độ sâu liên hợp sau nước nhảy y_2 và chiều dài nước nhảy L_j (Bảng 2).



Hình 1. Mô hình nước nhảy trên đáy nhám nghiên cứu [20]

Bảng 1. Tham số dòng chảy xiết đầu kênh và đặc điểm đáy nhám [1]

Thông số	Ký hiệu	Giá trị	Mô hình nền nhám	H_r (cm)	S_r (cm)	α (độ)
Độ sâu dòng chảy	y_1 (cm)	1,5; 2,0; 2,5; 3,0	R_I			$30^\circ, 120^\circ$
Vận tốc	v_1 (ms^{-1})	1,8 ÷ 5,1	R_II	2,0	5,0; 8,0	$45^\circ, 135^\circ$
Tỷ lưu lượng	q ($m^2 s^{-1}$)	0,0276 ÷ 0,1533	R_III			$60^\circ, 150^\circ$
Số Froude	Fr_1 (-)	5,65 ÷ 9,0	R_IV			90°

trong đó: H_r , S_r lần lượt là chiều cao và khoảng cách phần tử nhám; α góc hợp bởi phần tử nhám và phương dòng chảy.

Bảng 2. Kết quả mô phỏng xác định y_2 và L_j cho đáy nhám nghiên cứu [1]

Mô hình nền nhám	Trường hợp mô phỏng	Fr_1 (-)	y_1 (cm)	y_2 (m)	L_j (m)
R_I	Số (1÷80)			0,10 ÷ 0,31	0,35 ÷ 1,25
R_II	Số (81÷160)	5,65 ÷ 9,0	1,5 ÷ 3,0	0,1 ÷ 0,31	0,36 ÷ 1,10
R_III	Số (161÷240)			0,09 ÷ 0,31	0,38 ÷ 1,18
R_IV	Số (241÷280)			0,10 ÷ 0,33	0,36 ÷ 1,30

2.2 Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu được xây dựng dựa trên cách tiếp cận hậu xử lý chi tiết dữ liệu CFD, nhằm phân tích các đặc trưng trường vận tốc trong khu vực nước nhảy trên nền nhám lăng trụ chữ nhật. Trọng tâm của phương pháp là trích xuất, xử lý và phân tích các đại lượng vận tốc đặc trưng, bao gồm vận tốc dòng chủ, phân bố vận tốc theo chiều sâu và phân bố vận tốc gần đáy,...

Cụ thể, các mặt cắt đại diện được lựa chọn dọc theo chiều dòng chảy trong vùng nước nhảy để trích xuất biên dạng vận tốc trung bình theo thời gian. Tại mỗi mặt cắt, vận tốc được chuẩn hóa theo vận tốc

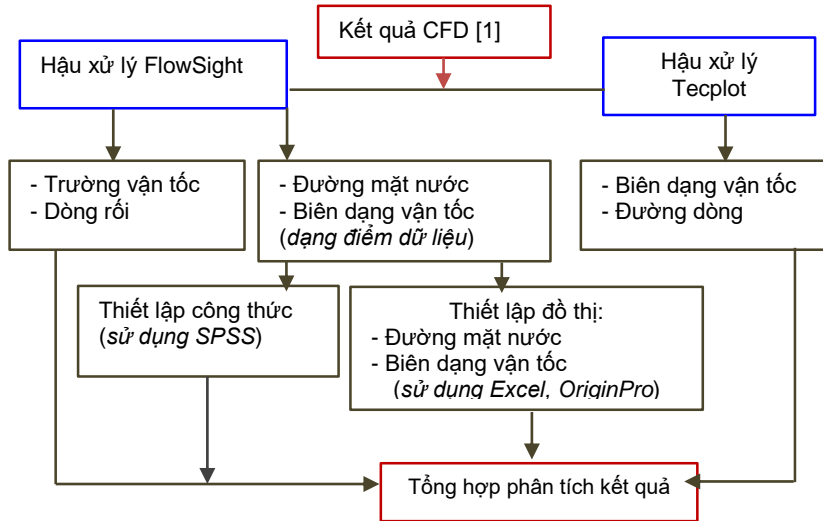
đặc trưng của dòng chảy nhằm đánh giá sự sai lệch của biên dạng vận tốc trên nền nhám so với trường hợp nền nhẵn. Vị trí vận tốc cực đại được xác định thông qua phân tích sự biến thiên của vận tốc theo chiều sâu, từ đó làm rõ xu hướng dịch chuyển của vận tốc cực đại dưới tác động của nền nhám.

Phân bố vận tốc gần đáy được phân tích chi tiết thông qua các trường vận tốc cục bộ và các mặt cắt dọc đáy kênh, nhằm nhận diện sự hình thành các vùng vận tốc thấp và đánh giá mức độ không đồng nhất của trường vận tốc trong khu vực chịu ảnh hưởng trực tiếp của các phần tử nhám. Đồng thời, các vùng tách dòng và tái nhập dòng xung quanh các

phần tử nhám lăng trụ chữ nhật được xác định gián tiếp thông qua sự biến đổi không liên tục của trường vận tốc.

Dựa trên kết quả mô phỏng số [1], bài báo đã tiến hành hậu xử lý CFD (sử dụng phần mềm FlowSight v11.2 của mô hình Flow-3D và Tecplot (360 EX 2022R2 version 2022.2.0.18713) để trích

xuất, biên tập các chuỗi số liệu và các trường đặc trưng nước nhảy nghiên cứu. Ngoài ra, nghiên cứu sử dụng công cụ Excel, OriginPro 9.0 và phần mềm SPSS để xây dựng các đồ thị và công thức được thiết lập trong nghiên cứu. Các bước thực hiện xử lý hậu CFD được minh họa như hình dưới đây.



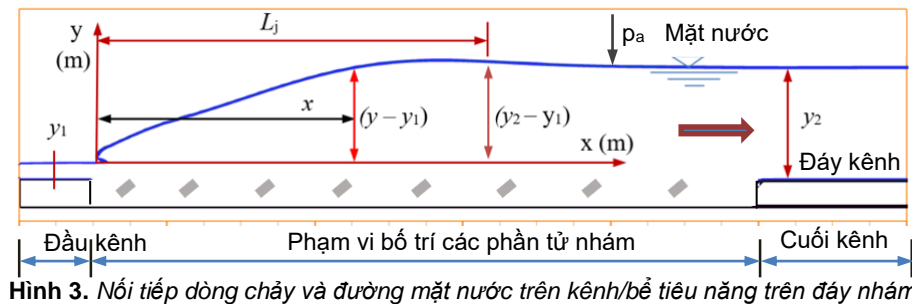
Hình 2. Quá trình xử lý dữ liệu trong nghiên cứu

3. Kết quả và thảo luận

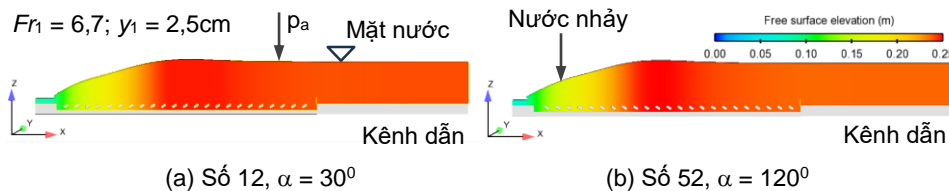
3.1 Nối tiếp dòng chảy và đường mặt nước trên kênh/bể tiêu năng

Kết quả phân tích biên dạng mặt thoáng của nước nhảy, giúp chúng ta có cơ sở định lượng số liệu thiết kế kích thước hiệu quả cho chiều cao tường bên và chiều dài đáy bể tiêu năng. Ngoài ra, thông qua phân tích đường mặt nước, xác định được các đặc trưng của nước nhảy như: độ sâu liên hợp sau nước nhảy y_2 , chiều dài khu nước xoáy L_r , chiều dài nước

nhảy L_j ... (Hình 3). Một số kết quả mô phỏng số điển hình về độ cao của mặt nước tự do, trên các lớp đá nhám R_I với các kích bản mô phỏng số số 12 và số 52 được minh họa trên Hình 4, ở điều kiện $Fr_1 = 6,7$ và độ sâu dòng chảy xiết $y_1 = 2,5$ cm. Các hình này thể hiện rõ ràng hiện tượng nước nhảy hình thành trên đáy nhám với vị trí bắt đầu nước nhảy được xác định cụ thể tại đầu nền nhám, tiếp theo là vùng nước xoáy phát triển với sự dâng cao nhanh của mặt nước và hình thành vùng xoáy mạnh trong khu vực chuyển tiếp từ dòng chảy xiết sang dòng chảy êm.



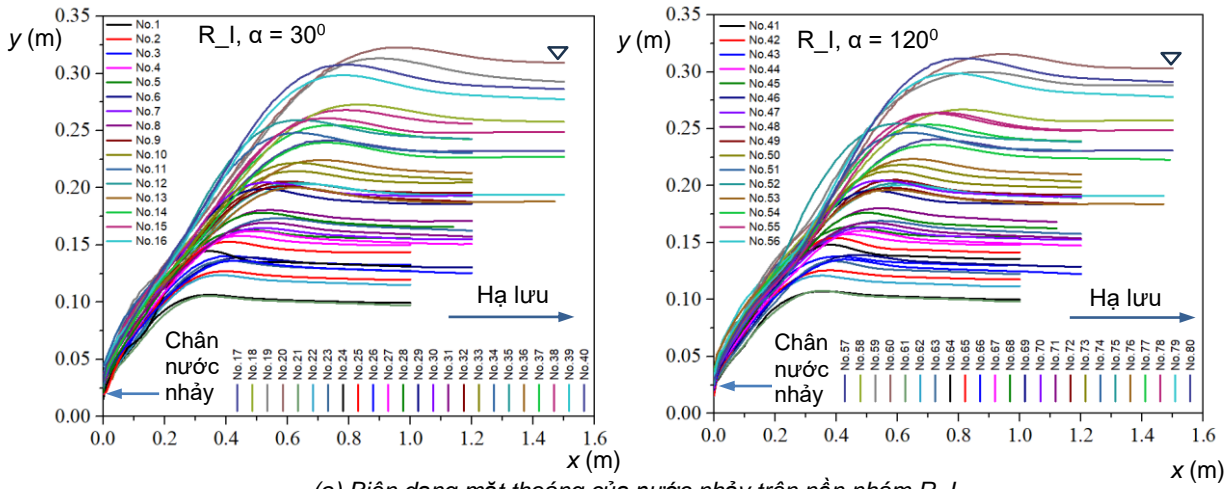
Hình 3. Nối tiếp dòng chảy và đường mặt nước trên kênh/bể tiêu năng trên đáy nhám



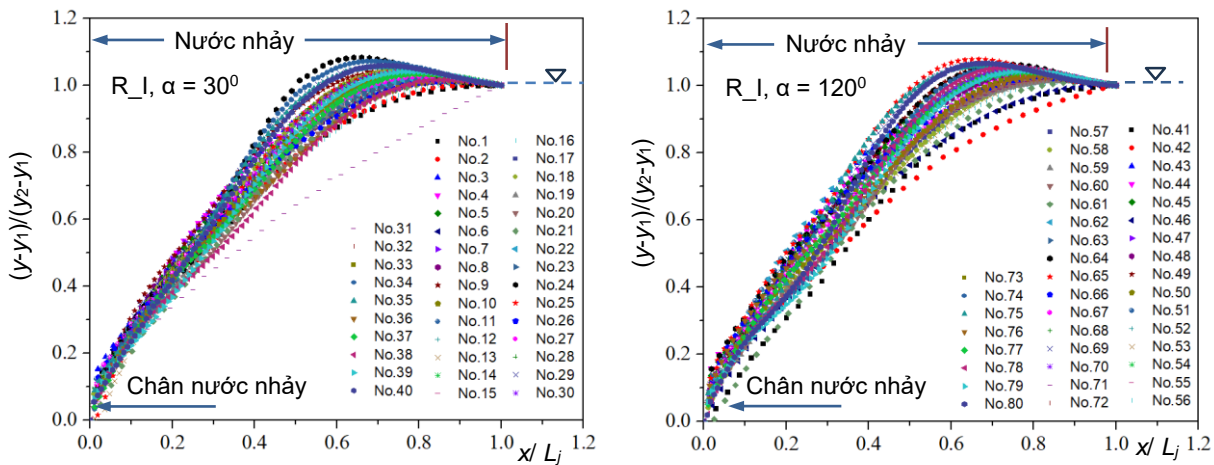
Hình 4. Kết quả mô phỏng nước nhảy cho mô hình đáy nhám R_I với $Fr_1 = 6,7$

Thông qua các mặt cắt dọc về biên dạng mặt thoáng của nước nhảy trên kênh thu được từ kết quả mô phỏng (Hình 5(a)), nghiên cứu đã xác định chi tiết các biên dạng mặt nước chuẩn hóa cho vùng nước nhảy (Hình 5(b)). Trong đó, đường mặt nước trên nền nhám R_I cho thấy sự gia tăng đột ngột mực nước tại vùng nước nhảy, tiếp theo là xu hướng ổn

định nhanh về phía hạ lưu. Độ dốc mặt nước trong vùng nước xoáy tương đối lớn, phản ánh quá trình tiêu năng tập trung và sự tăng cường rối do tương tác giữa dòng chảy và nền nhám. Sau khi kết thúc vùng nước nhảy, đường mặt nước dần trở nên ổn định, cho thấy dòng chảy đã đạt trạng thái chảy êm trong đoạn cuối bể tiêu năng.



(a) Biên dạng mặt thoáng của nước nhảy trên nền nhám R_I



(b) Biên dạng mặt nước chuẩn hóa tại phạm vi nước nhảy trên đáy nhám R_I

Hình 5. Biên dạng mặt nước trên kênh với đáy nhám R_I

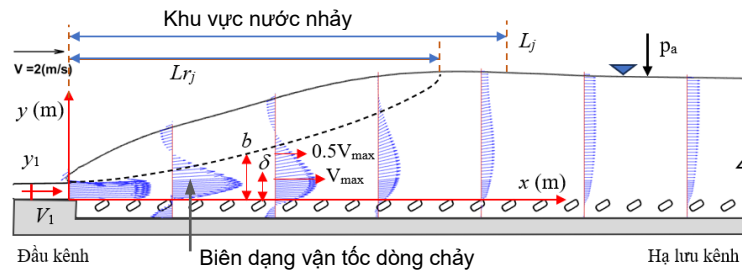
Nhìn chung, các kết quả trình bày từ Hình 3 đến Hình 5 cho thấy nền nhám lắng trụ chữ nhật làm thay đổi đáng kể đặc trưng nổi tiếp dòng chảy và hình thái đường mặt nước trong kênh/bể tiêu năng. Nước nhảy hình thành ổn định, đường mặt nước biến đổi mạnh trong vùng nước xoáy và nhanh chóng ổn định về phía hạ lưu. Những đặc điểm này là cơ sở quan trọng để phân tích sâu hơn các đặc trưng trường vận tốc dòng chảy trong các mục tiếp theo, đặc biệt là vai trò của nền nhám trong việc điều khiển cấu trúc dòng chảy và tăng cường hiệu quả tiêu năng trong nước nhảy tự do, ổn định.

3.2 Đặc trưng trường vận tốc dòng chảy khu vực

nước nhảy

a. Trường vận tốc dòng chủ khu vực nước nhảy

Bằng cách làm rõ hơn ứng xử của dòng chảy lên loại nền nhám trong vùng nước nhảy, chúng ta sẽ thu được cái nhìn tổng quan hơn về ảnh hưởng của đặc trưng hình học đáy nhám lên đặc điểm của nước nhảy. Vì vậy, phần này nghiên cứu xem xét sự thay đổi biên dạng vận tốc dòng chảy chủ, trong phạm vi nước nhảy trên nền nhám so với nền trơn (nước nhảy cổ điển). Sơ đồ nghiên cứu về sự phân bố vận tốc trong vùng nước nhảy trên nền nhám lắng trụ chữ nhật được tái hiện chi tiết trong Hình 6:

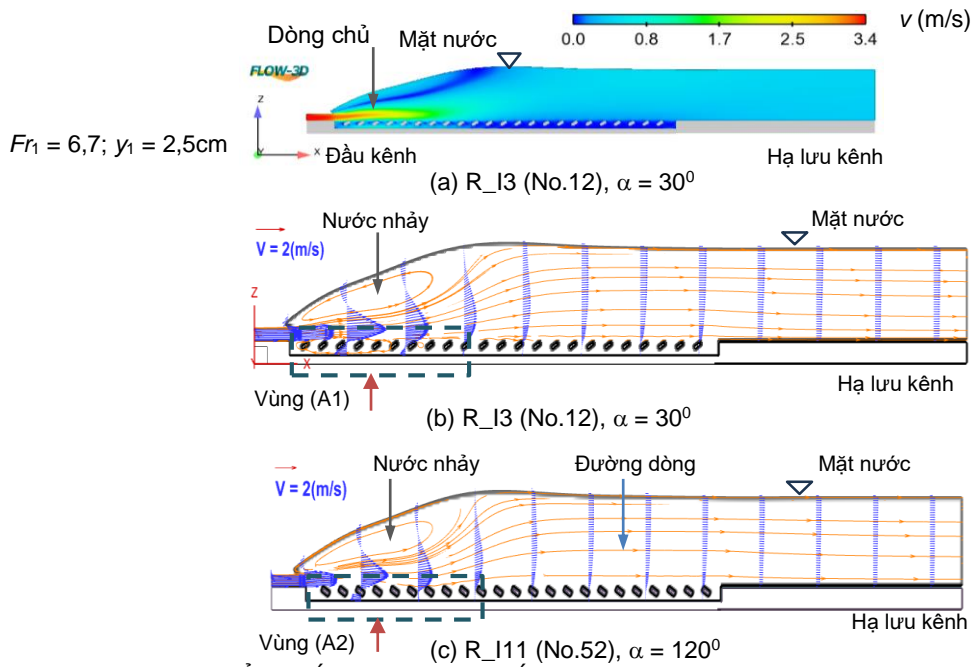


Hình 6. Mô tả biên dạng vận tốc dòng chảy nước nhảy trên nền nhám nghiêng cứu

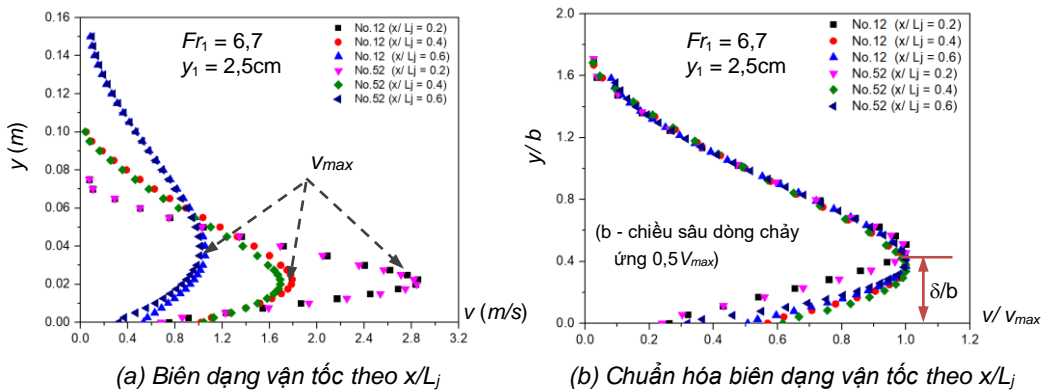
Một số kết quả thể hiện trường vận tốc dòng chủ thu được từ mô phỏng và hậu xử lý CFD (từ Hình 7 đến Hình 9) cho thấy, nền nhám làm thay đổi rõ rệt cấu trúc vận tốc của nước nhảy so với trường hợp nền nhẵn. Trong vùng nước nhảy, trường vận tốc xuất hiện sự phân hóa rõ rệt tạo thành ba khu vực điển hình mang đặc điểm khác nhau. Phía trên là vùng nước tuần hoàn (khu nước xoáy) hình thành các xoáy cuộn lớn dạng như kiểu con lăn, tiếp theo là dòng chủ mang động lượng chính của dòng chảy, phía dưới (vùng gần đáy nhám) vùng vận tốc suy giảm mạnh hình thành các xoáy nhỏ và cục bộ, qua đó phản ánh tác động chi

phối của nhám đáy đến sự phân bố lại động lượng của dòng chảy trong nước nhảy.

Hình 7 minh họa rõ ràng vùng nước xoáy và khu vực dòng chảy chủ (dòng chảy chính) trong phạm vi nước nhảy. Mặt khác, Hình 7(b), (c) chỉ ra rằng các biên dạng vận tốc trên mặt cắt ngang điển hình của dòng chủ, có sự tương đồng về biên dạng và tương tự về quy luật phân bố theo độ sâu, khi các phần tử nhám được bố trí theo hướng dòng chảy (mô phỏng số 12) và khi các phần tử nhám được bố trí ngược hướng dòng chảy (mô phỏng số 52).



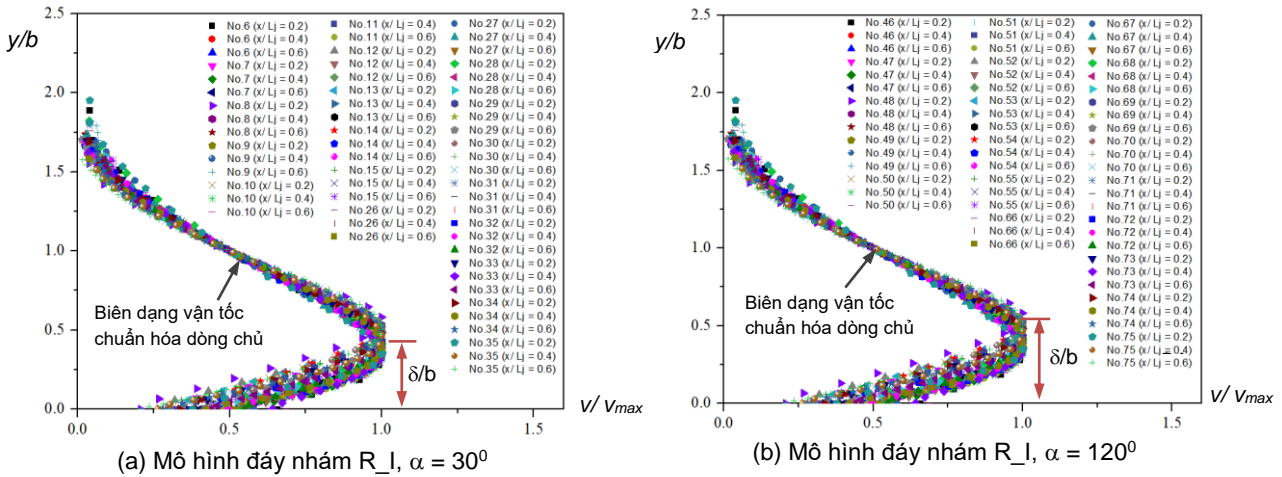
Hình 7. Phổ vận tốc, biên dạng vận tốc, đường dòng cho mô hình R_I với $Fr_1 = 6,7$



Hình 8. Biên dạng vận tốc dòng chủ theo x/L_j cho mô hình R_I (số 12 và 52)

Biên dạng phân bố vận tốc dòng chủ theo độ sâu được minh họa trên Hình 8. Trong đó, Hình 8(a) thể hiện rõ phân bố vận tốc trên mặt cắt ngang điển hình trong khu vực nước nhảy ở các khoảng cách khác nhau

từ chân nước nhảy, với các tỷ lệ x/L_j lần lượt là 0,2, 0,4 và 0,6 (xem kết hợp với Hình 3) cho mô phỏng số 12 và 52. Các biên dạng vận tốc dòng chủ này cũng thể hiện sự tương tự về quy luật với đáy trơn.



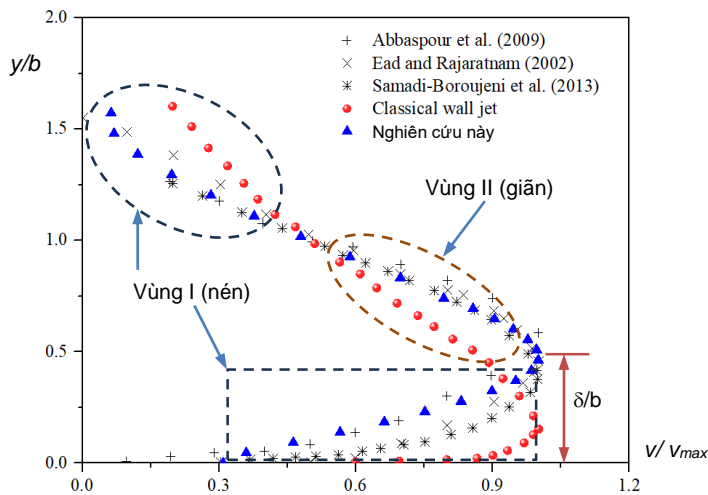
Hình 9. Biên dạng vận tốc chuẩn hóa của dòng chảy chủ với đáy nhám R_I

Ngoài ra, độ dày lớp biên (δ) tăng đồng thời với giá trị vận tốc giảm của V_{max} trên các mặt cắt ngang với khoảng cách x tăng dần. Các biên dạng vận tốc chuẩn hóa của dòng chủ đối với trường hợp số 12 và 52 (Hình 8(b)), là tương tự nhau. Biên dạng vận tốc chuẩn hóa của dòng chủ với các mô hình R_I cũng cho thấy những điểm tương đồng (Hình 9), chiều dày lớp biên δ biến thiên trong khoảng 0,26 đến 0,51, giá trị trung bình khoảng 0,43.

gần đáy nhám bị chiếm ưu thế bởi các vùng vận tốc trung bình và thấp. Điều này chứng tỏ nền nhám đã làm suy giảm động lượng của dòng chảy ngay từ vùng đầu nước nhảy, dẫn đến sự tái phân bố trường vận tốc theo chiều sâu dọc theo kênh.

Các phân bố vận tốc dòng chảy trong Hình 7 đến 10 cho thấy vùng vận tốc lớn của dòng chủ bị thu hẹp đáng kể về mặt không gian theo chiều đứng. So với trường hợp nền nhẵn, phần lõi dòng chảy vận tốc cao không còn kéo dài và bám sát đáy kênh/bể tiêu năng mà bị đẩy lên phía trên, trong khi phần dưới phạm vi

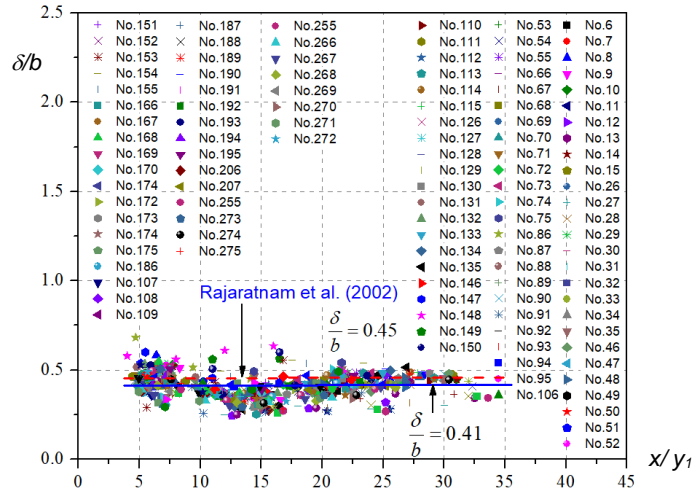
Để làm rõ hơn sự thay đổi của biên dạng vận tốc dòng chủ, nghiên cứu tiến hành so sánh kết quả biên dạng dòng chủ với các nghiên cứu đã được công bố gần đây và với nước nhảy cổ điển, chi tiết thể hiện trên Hình 10. Từ hình này cho thấy rõ ràng, các biên dạng vận tốc dòng chủ tương tự về quy luật phân bố với các mô hình đáy nhám khác nhau, khi có cùng điều kiện bố trí đáy nhám và dòng chảy xiết nghiên cứu [9, 11, 21], nhưng có sự khác biệt lớn so với cấu hình vận tốc dòng chảy trên đáy nhẵn [22].



Hình 10. Biên dạng vận tốc dòng chủ với các mô hình đáy nhám và nhẵn

Sự khác biệt này có thể được phân thành hai vùng: Vùng I, thể hiện cho vùng vận tốc bị nén lại theo phương đứng, xuất hiện ở dòng chủ phạm vi phía trên (phần tiếp xúc với khu vực nước xoáy) và phần phía dưới (phạm vi gần đáy nhám); vùng II, thể hiện biên dạng vận tốc được giãn ra, kéo theo biên dạng vận tốc dòng chủ được điều chỉnh tổng thể khi

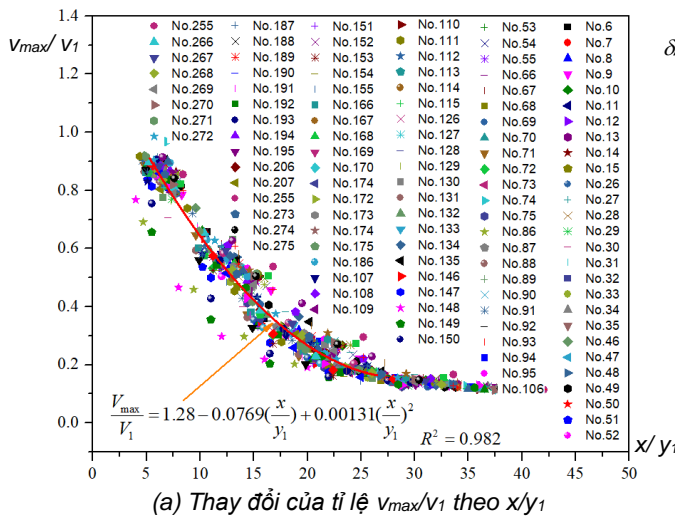
dòng chảy chịu tác dụng trực tiếp của các mô hình đáy nhám. Sự thay đổi lớp biên của các mô hình đáy nhám có sự chênh lệch ít, điều này có thể được giải thích về cách thức bố trí các loại mô hình đáy nhám có đỉnh ngang bằng với đáy kênh lên dòng chảy, phần mang vận tốc lớn (động năng cao) không xung đột trực tiếp với mô nhám.



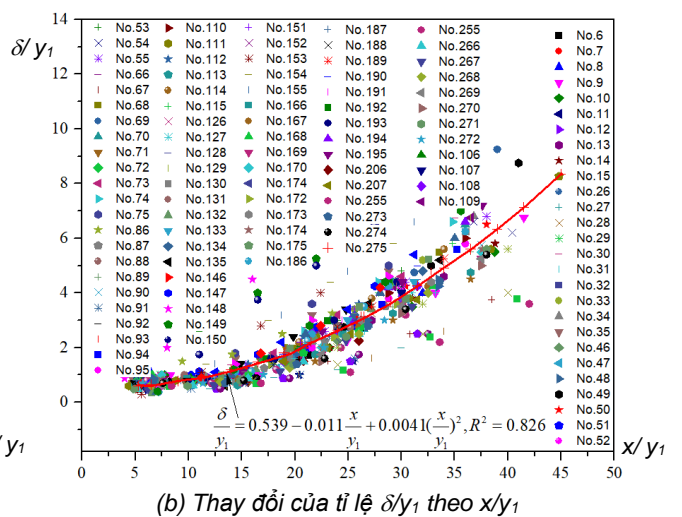
Hình 11. Sự thay đổi của tỷ lệ δ/b theo khoảng cách dọc x/y_1

Độ dày lớp biên chuẩn hóa của δ/b dọc theo hướng dòng chảy đối với các đáy nhám lăng trụ chữ nhật (Hình 11), các điểm giá trị của δ/b tập trung gần đường trung bình với giá trị trung bình là 0,41, trong khi kết quả nghiên cứu của Ead and Rajaratnam [9] nước nhảy trên đáy nhám

hình sin, tỷ lệ δ/b bằng 0,45. Ngược lại, đối với nền trơn, giá trị tương ứng khoảng 0,16 (Hình 10). Giá trị tối thiểu của δ/b bằng 0,2 đối với thử nghiệm mô hình R_II6 (số 108) và giá trị tối đa của δ/b bằng 0,52 đối với thử nghiệm mô hình R_II2 (số 86).



(a) Thay đổi của tỷ lệ v_{max}/v_1 theo x/y_1



(b) Thay đổi của tỷ lệ δ/y_1 theo x/y_1

Hình 12. Biến đổi của tỷ lệ v_{max}/v_1 và δ/y_1 theo khoảng cách dọc x/y_1

Dòng chảy xiết với vận tốc cao thông qua nước nhảy chuyển thành dòng chảy êm với vận tốc nhỏ. Do đó, việc nghiên cứu và thể hiện rõ ràng sự biến thiên vận tốc cực đại v_{max} và độ dày lớp biên δ theo khoảng cách dọc x , bắt đầu từ chân nước nhảy là cần thiết

(Hình 6) để xem xét phạm vi cần gia cố kết cấu đáy kênh/bể. Trong nghiên cứu này, vận tốc v_1 có giá trị thay đổi từ 1,84 đến 5,11 m s⁻¹ tương ứng với số Fr_1 thay đổi từ 5,65 đến 9,0. Sự biến thiên của các tham số v_{max}/v_1 , δ/y_1 theo x/y_1 được thể hiện trên Hình 12.

Những hình này chỉ ra tham số v_{max}/v_1 giảm rất nhanh dọc theo dòng chảy, đồng thời độ dày của lớp biên δ cũng gia tăng mạnh theo hướng dòng chảy, từ đó làm rõ quá trình chuyển trạng thái dòng chảy xiết sang chảy êm thông qua hình thức nước nhảy. Các mối

quan hệ này đã được nghiên cứu, định lượng thành các công thức nhằm thể hiện sự biến thiên của đại lượng v_{max}/v_1 , δ/y_1 theo chiều dòng chảy x/y_1 . Kết quả phân tích hồi quy bằng phần mềm SPSS cho hệ số tương quan cao và sai số $RMSE$, MAE nhỏ:

$$\frac{v_{max}}{v_1} = 1.28 - 0.0769 \frac{x}{y_1} + 0.00131 \left(\frac{x}{y_1}\right)^2; (R^2 = 0,982; RMSE = 0,057; MAE = 0,04) \tag{1}$$

$$\frac{\delta}{y_1} = 0.539 - 0.011 \frac{x}{y_1} + 0.0041 \left(\frac{x}{y_1}\right)^2; (R^2 = 0,826; RMSE = 0,644; MAE = 0,383) \tag{2}$$

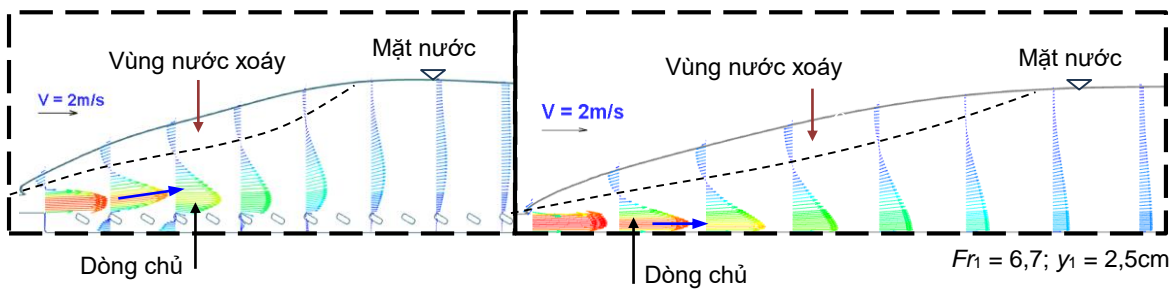
Việc đồng thời quan sát được sự suy giảm của v_{max} và sự gia tăng độ dày lớp biên δ cho thấy, nền nhám lăng trụ chữ nhật không chỉ làm giảm vận tốc ở phạm vi cục bộ, mà còn làm thay đổi cơ chế phân bố động lượng của toàn bộ trường vận tốc dòng chủ trong nước nhảy. Đây chính là điểm mới của nghiên cứu thay vì đánh giá hiệu quả nhám thông qua các chỉ tiêu tổng thể, nghiên cứu này làm rõ được cách thức đáy nhám tái cấu trúc trường vận tốc dòng chủ, cung cấp bằng chứng định lượng trực tiếp từ kết quả CFD hậu xử lý.

Những kết quả này khẳng định rằng, ảnh hưởng của nền nhám lăng trụ chữ nhật đến nước nhảy không chỉ thể hiện ở hình thái mặt nước hay mức tiêu năng tổng thể, mà thể hiện rõ ràng và sâu sắc trong

sự biến đổi trường vận tốc dòng chủ, đặc biệt thông qua sự suy giảm vận tốc cực đại và sự phát triển mạnh của lớp biên dòng chảy.

b. Phân bố vận tốc dòng chảy khu vực đáy nhám

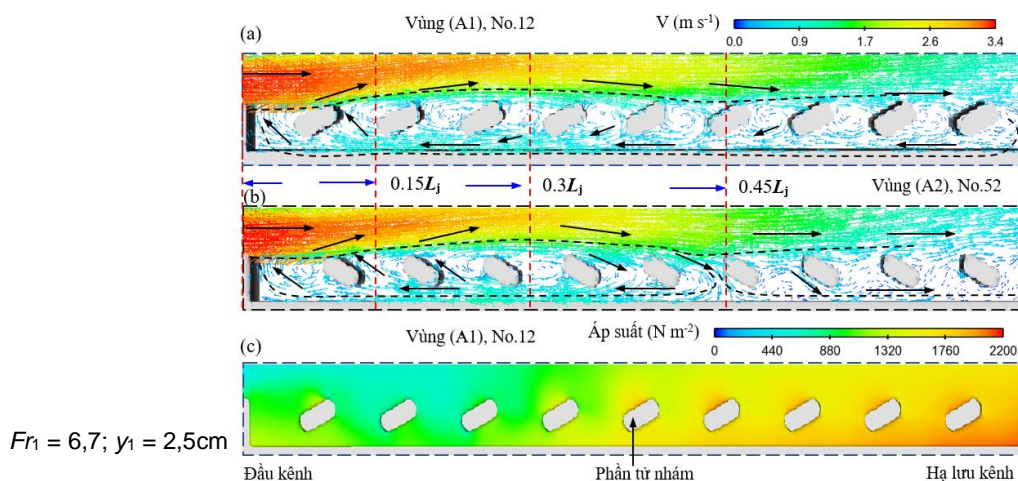
Về tổng thể trường vận tốc khu vực nước nhảy chia thành ba vùng riêng biệt: vùng nước xoáy, dòng chảy chủ và vùng đáy nhám (Hình 13(a)), trong đó phạm vi dòng chảy chủ có sự thay đổi rõ ràng nhất về độ lớn, hướng vận tốc bởi ảnh hưởng của các phần tử nhám bố trí ở đáy kênh đến cấu trúc dòng chảy gần đáy nước nhảy. Trong khi đó, với nền trơn, vận tốc dòng chảy gần như song song với đáy và có sự thay đổi chậm về độ lớn vì ma sát dòng chảy với đáy kênh nhẵn nhỏ, năng lượng tiêu tán thấp (Hình 13(b)).



(a) Biên dạng vận tốc đáy nhám (b) Biên dạng vận tốc đáy nhẵn
Hình 13. So sánh biên dạng vận tốc trên đáy nhám R_{I11} (số 52) và đáy nhẵn

Hình 14 thể hiện chi tiết cho trường vận tốc dòng chảy phạm vi đáy nhám, cụ thể trong khoảng chiều dài 0,1 đến 0,3 L_j (xuất phát từ vị trí đỉnh phần tử nhám đầu tiên theo chiều dòng chảy) trường vận tốc dòng chảy chủ sát đáy có xu hướng tách khỏi biên đáy kênh rõ rệt, dòng chủ ko đi song song với đáy kênh mà hướng lên trên về phía lõi của dòng chủ một góc 6° đối với Hình 14(a) và 10° đối với Hình 14(b),

có sự khác biệt về góc như trên là do trường hợp (a) phần tử nhám bố trí thuận dòng chảy, nên dòng chảy thuận lợi va chạm và trượt lên bề mặt của phần tử nhám đầu tiên, trong khi đó trường hợp (b) phần tử nhám bố trí ngược hướng dòng chảy, dẫn tới dòng chảy va chạm trực tiếp với bề mặt đỉnh phần tử nhám, cản trở dòng chảy nên góc vận tốc lớn hơn, dòng chủ bị ép hướng lên trên.



Hình 14. Chi tiết dòng chảy khu vực bố trí các phần tử nhám cho mô hình R_I với số 12 và 52 (xem kết hợp với Hình 7)

Với khoảng $0,3$ đến $0,6L_j$ trường dòng chảy sát đáy có xu hướng lao xuống bề mặt đáy kênh, có thể quan sát rõ ràng hơn trong khoảng $0,3$ đến $0,45L_j$, với Hình 14(a) góc hướng xuống của trường vận tốc sát đáy hợp với phương ngang một góc khoảng 4° , khá nhỏ, do đó xu thế dòng chảy dễ dàng trượt trên các bề mặt đỉnh các phần tử nhám và xuôi dần về hạ lưu kênh. Trong khi đó với Hình 14(b) thì góc hướng xuống trường vận tốc khoảng 7° khá lớn trong khoảng $0,3$ đến $0,45L_j$, dòng chảy thuận lợi đi xuống đáy kênh và phân tách thành hai hướng cụ thể tại vị trí $0,45L_j$, từ vị trí $0,45L_j$ hướng về thượng lưu kênh xuất hiện dòng chảy ngược (dòng thứ cấp) bán sát đáy kênh với vận tốc lớn nhất khoảng $0,8 \text{ ms}^{-1}$ (tại vị trí $0,3L_j$). Ngoài ra, dòng chảy này tách thành các dòng chảy nhỏ, đi qua khoảng trống giữa các phần tử nhám hướng ngược vào dòng chảy chính. Từ khoảng $0,45L_j$ về hạ lưu dòng chảy bán sát đáy kênh xuôi dòng với vận tốc rất nhỏ và hình thành một số xoáy cuộn nhỏ giữa phần tử nhám. Trong khi đó, với Hình 14(a) thì tại vị trí $0,8L_j$ hướng về thượng lưu kênh xuất hiện dòng chảy ngược bán sát đáy kênh, với vận tốc lớn nhất khoảng $0,6 \text{ ms}^{-1}$ (tại vị trí $0,2L_j$), dòng chảy này tách thành các dòng chảy nhỏ đi qua khoảng trống các phần tử nhám, hướng ngược vào dòng chảy chính tạo thành dòng chảy cuộn xoáy trong khoảng $0,8L_j$, sau vị trí $0,8L_j$ dòng chảy sát đáy xuôi về hạ lưu với vận tốc rất nhỏ.

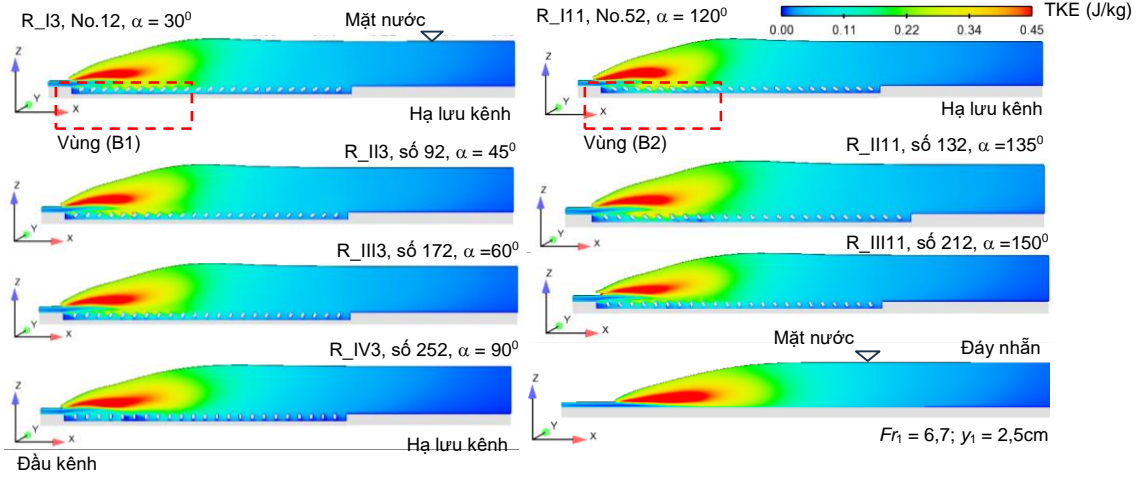
Mặc dù trường vận tốc dòng chảy gần vùng đáy nhám có sự thay đổi phức tạp so với trường hợp đáy trơn, xuất hiện nhiều các xoáy nhỏ trong khoảng không giữa các phần tử nhám. Tuy nhiên, trường áp suất tại vùng đáy gồ ghề gần như tồn tại áp suất

dương (Hình 14(c)). Vì vậy, giảm thiểu khả năng xảy ra hiện tượng xâm thực trên nền kênh/bể trong quá trình vận hành thoát lũ.

3.3 Đặc trưng dòng rối và tiêu năng đáy nhám

Ảnh hưởng của nền nhám đến cấu trúc dòng chảy cũng được thể hiện thông qua đặc tính dòng chảy rối trong vùng nước nhảy. Do đó, phần này xem xét chi tiết hơn đặc tính rối của dòng chảy, có ảnh hưởng trực tiếp đến các đặc trưng thủy lực của nước nhảy. Kết quả xử lý hậu CFD thể hiện Hình 15 giới thiệu, mô tả phổ phân bố động năng rối của dòng chảy của các mô hình đáy nhám và đáy trơn điển hình. Từ Hình 15 cho thấy phân bố TKE giữa đáy nhám và đáy trơn có sự khác biệt lớn, với nền nhẵn TKE chủ yếu tập trung giá trị cao tại vùng ranh giới giữa dòng chủ và khu xoáy nước đạt giá trị $0,45 \text{ J/kg}$, kéo dài từ chân nước nhảy tới $2/3$ chiều dài nước nhảy, tức TKE suy giảm rất chậm theo dòng chảy. Ngoài ra, nền đáy trơn ảnh hưởng rất nhỏ tới đặc tính rối của dòng chảy.

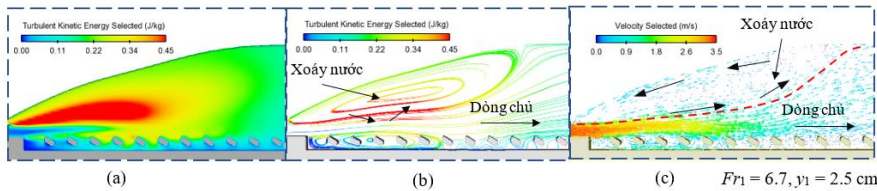
Mặt khác, Hình 15 chỉ ra đối với nền nhám, động năng rối (TKE) được chia rõ ràng thành hai phần: phần thứ nhất, TKE tập trung ranh giới giữa vùng nước xoáy và dòng chảy chính với cường độ cao, tương tự như trường hợp đáy trơn (Hình 15) nhưng ngắn hơn, nghĩa là TKE suy giảm rất nhanh theo phương dòng chảy; phần thứ hai xảy ra trên đỉnh của các phần tử nhám, tại đây TKE có cường độ cao hơn nền đáy nhẵn và phân bố không đều từ hàng nhám đầu tiên tới các hàng nhám sau đó trong khu vực nước nhảy. Vì vậy, nền nhám làm gia tăng sự tiêu tán năng lượng trong nước nhảy. Sau phạm vi nước nhảy, TKE đều nhỏ trên cả hai mô hình đáy nhám và nhẵn, phù hợp với bản chất vật lý của hiện tượng dòng chảy êm trên kênh hạ lưu.



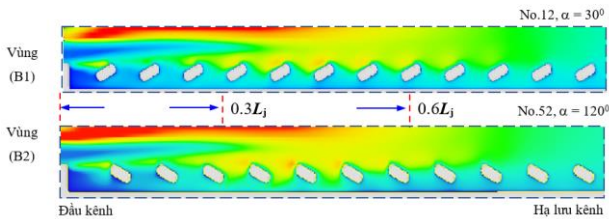
Hình 15. Động năng rối TKE trên đáy nhám ($S_r = 5cm, Fr_1 = 6,7$) và nền nhẵn

Hình 16 tập trung thể hiện, phân tích và làm rõ đặc tính rối của dòng chảy tại khu vực dòng chủ và khu vực nước xoáy. Từ Hình 16(a) cho thấy cường độ TKE tập trung chủ yếu giữa vùng biên của nước xoáy và dòng chảy chủ. Tại ranh giới giữa hai vùng này trong Hình 16(b), cường độ TKE là lớn nhất đạt giá trị 0,45 J/kg, tại đó các phần tử chất lỏng có thể di chuyển từ dòng chảy

chủ vào vùng nước xoáy qua bề mặt tiếp xúc của hai vùng và ngược lại. Điều này có thể được giải thích bởi tương tác dòng chảy xảy ra trên bề mặt ranh giới của dòng chảy xuôi và vùng con lặn. Do đó, các phần tử chất lỏng di chuyển khá hỗn loạn trên bề mặt ranh giới giữa hai vùng này (Hình 16(c)) làm tăng mức độ hỗn loạn của dòng chảy.



Hình 16. (a) và (b) TKE trên đáy nhám, (c) trường vận tốc dòng chảy với R_{I11} (No.52), $\alpha = 120^\circ$



Hình 17. Chi tiết động năng rối (TKE) trên vùng nền thô (xem cùng Hình 15)

Độ lớn TKE trên vùng đáy nhám tại phạm vi nước nhảy được thể hiện cụ thể, chi tiết trong Hình 17. Hình này cho thấy trong phạm vi nền nhám từ $0,3L_j$ đến $0,6L_j$, thì TKE tập trung và đạt giá trị cực đại khoảng $0,34 Jkg^{-1}$ (điều này được giải thích là trong phạm vi đáy nhám, trường vận tốc gần đáy hướng về bề mặt đáy kênh như phân tích ở mục 3.2b). Trong phạm vi khoảng $0,3L_j$, TKE chủ yếu tập trung tại phạm vi đỉnh của các phần tử nhám với giá trị $0,23 Jkg^{-1}$, do dòng chủ tách khỏi đáy kênh trong phạm vi này. Từ $0,6L_j$ về phía kênh hạ lưu, TKE giảm dần và có giá trị cực tiểu, hạ lưu hình thành nước chảy êm.

Hình 17 cũng cho thấy rõ ràng, các phần tử nhám được bố trí ngược hướng dòng chảy (số 52), có cường độ TKE lớn hơn và tập trung hơn trong phạm vi từ $0,3L_j$ đến $0,45L_j$ chiều dài đáy nhám (Hình 17 vùng B2). Điều này dẫn đến hiệu quả tiêu tán năng

lượng tốt hơn so với các phần tử thô được sắp xếp theo hướng dòng chảy như số 12, khoảng 9,9%. Ngoài ra, ứng suất kéo dòng chảy trên đáy nhám trong trường hợp số 52 lớn hơn so với số 12 khoảng 10%.

4. Kết luận

Nghiên cứu đã làm rõ một cách có hệ thống đặc trưng trường vận tốc dòng chủ của nước nhảy tự do trên nền nhám lăng trụ chữ nhật, thông qua phân tích chi tiết các kết quả mô phỏng CFD và hậu xử lý trường dòng chảy. Các kết luận chính được rút ra như sau:

Kết quả nghiên cứu cho thấy nền nhám lăng trụ chữ nhật gây ra sự biến đổi rõ rệt trường vận tốc dòng chủ trong khu vực nước nhảy. Vận tốc cực đại của dòng chảy giảm đáng kể so với trường hợp nền nhẵn trong cùng điều kiện, sự suy giảm này không mang tính cục bộ mà thể hiện trên toàn bộ chiều sâu dòng chảy, phản ánh quá trình tái phân bố động lượng dưới tác động của nhám đáy. Đồng thời, biên dạng phân bố vận tốc dòng chủ theo chiều sâu bị thay đổi mạnh, thể hiện qua sự dịch chuyển ổn định của vị trí vận tốc cực đại lên phía trên cách xa đáy kênh, kéo theo độ dày lớp dòng chịu ảnh hưởng đáy (δ - lớp biên) gia tăng lớn, chiếm một phần đáng kể

chiều sâu dòng chảy. Điều này khẳng định rằng nền nhám không chỉ tác động đến vùng cận đáy mà chi phối cấu trúc vận tốc của toàn bộ mặt cắt ngang.

Mặt khác, phân tích vùng gần đáy cho thấy sự hình thành các dải vận tốc thấp liên tục dọc theo đáy nhám, gắn liền với các vùng tách dòng và tái nhập dòng phía sau các phần tử lồi trụ chữ nhật. Phạm vi ảnh hưởng của vùng vận tốc thấp mở rộng đáng kể theo chiều dòng chảy và duy trì ngay cả ở các mặt cắt hạ lưu của vùng nước xoáy, chứng tỏ vai trò chi phối của phần tử nhám đối với trường vận tốc gần đáy. Các đặc tính rối thu được từ kết quả CFD cho thấy cường độ rối gia tăng mạnh trong lớp gần đáy, làm tăng gradient vận tốc theo chiều sâu và thúc đẩy quá trình trao đổi động lượng giữa các lớp dòng chảy. Chính sự phát triển mạnh của rối trong vùng này là cơ chế chủ đạo dẫn đến sự suy giảm vận tốc dòng chủ và tiêu năng hiệu quả trong nước nhảy trên nền nhám lồi trụ chữ nhật. Như vậy, tiêu năng không chỉ diễn ra thông qua cơ chế xoáy nước trên mặt của nước nhảy mà còn thông qua quá trình khuếch tán động lượng do rối tăng cường trong lớp ảnh hưởng đáy.

Kết quả nghiên cứu đã làm rõ được mối liên hệ định lượng giữa trường vận tốc dòng chủ, phạm vi ảnh hưởng gần đáy và đặc tính rối trong nước nhảy trên nền nhám lồi trụ chữ nhật. Đây là đóng góp chính của nghiên cứu, cung cấp cách tiếp cận dựa trên trường vận tốc để lý giải cơ chế tiêu năng và làm cơ sở khoa học cho thiết kế, tối ưu hóa bề tiêu năng sử dụng nền nhám lồi trụ chữ nhật. Tuy nhiên, nghiên cứu vẫn tồn tại một số hạn chế: kết quả được xây dựng dựa trên dữ liệu mô phỏng CFD đã công bố được hiệu chỉnh và kiểm định, nhưng chưa được kiểm chứng lại bằng thực nghiệm riêng cho đáy nhám lồi trụ chữ nhật; vấn đề về mạch động áp suất, xâm thực nền nhám là những hướng nghiên cứu tiếp theo cần được xem xét và triển khai nhằm hoàn thiện cơ sở khoa học về nước nhảy trên nền nhám nghiên cứu.

Lời cảm ơn:

Tác giả cảm ơn sự hỗ trợ về chuyên môn và cơ sở dữ liệu nghiên cứu cho bài báo: Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Đại học Tứ Xuyên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ty, T. C., Trieu, T. C. (2025). *Numerical and analysis effects of rectangular prism rough beds on hydraulic jumps in open channels*. AIP Advances, 15(7), 1-10. doi: <https://doi.org/10.1063/5.0267793>.

[2] Peterka, A. (1958). *Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators*. Engineering Monograph No.

[3] Hager, W. H. (1992). *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*. Kluwer Academic Publishers.

[4] Nguyễn Trí Viêng, Trần Văn Cung, Nguyễn Xuân Đặng (2015). *Công trình tháo lũ trong đầu mối hệ thống thủy*

lợi. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội. <https://nxbxaydung.com.vn/cong-trinh-thao-lu-trong-dau-moi-he-thong-thuy-loi-b5745.html>.

[5] Chow, V. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill, New York.

[6] Rajaratnam, N. (1967). *Hydraulic jumps*. Advances in hydroscience, 4, 197-280. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9935-1.50011-2>.

[7] Chanson, H. (2004). *Hydraulics of open channel flow*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5978-9.X5000-4>.

[8] Rajaratnam, N. (1968). *Hydraulic jumps on rough beds*. Trans. Eng. Inst. Canada, 11(2), 1-8.

[9] Ead, S., Rajaratnam, N. (2002). *Hydraulic jumps on corrugated beds*. Journal of Hydraulic Engineering, 128(7), 656-663. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2002\)128:7\(656\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:7(656)).

[10] Tokyay, N. D. (2005). *Effect of channel bed corrugations on hydraulic jumps*. Impacts of Global Climate Change, 1-9. doi: [https://doi.org/10.1061/40792\(173\)408](https://doi.org/10.1061/40792(173)408).

[11] Abbaspour, A. et al. (2009). *Effect of sinusoidal corrugated bed on hydraulic jump characteristics*. Journal of Hydro-environment Research, 3(2), 109-117. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jher.2009.05.003>.

[12] Nikmehr, S., Aminpour, Y. (2020). *Numerical Simulation of Hydraulic Jump over Rough Beds*. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 64(2), 396-407. doi: <https://doi.org/10.3311/PPci.15292>.

[13] Ty, T. C. et al. (2024). *Influence of Right Triangular Prism Rough Beds on Hydraulic Jumps*. Applied Sciences, 14, 1-19. doi: <https://doi.org/10.3390/app14020594>.

[14] Abbaspour, A. et al. (2009). *Numerical study of hydraulic jumps on corrugated beds using turbulence models*. Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 33(1), 61-72. doi: 10.3906/muh-0901-7.

[15] Elsebaie, I. H., Shabayek, S. (2010). *Formation of hydraulic jumps on corrugated beds*. International Journal of Civil T Environment al Engineering IJCEE-IJENS, 10(1), 37-47.

[16] Ghaderi, A. et al. (2021). *Numerical simulations of the flow field of a submerged hydraulic jump over triangular macroroughnesses*. Water, 13(5), 1-24. doi: <https://doi.org/10.3390/w13050674>.

[17] Ebrahimi, S. et al. (2013). *Numerical study of hydraulic jump on rough beds stilling basins*. Journal of Civil Engineering and Urbanism, 3(1), 19-24.

[18] Kim, H. S. et al. (2023). *Flow turbulence and pressure fluctuations in a hydraulic jump*. Sustainability, 15(19), 1-16. <https://doi.org/10.3390/su151914246>.

[19] Ruonan, B. et al. (2016). *Comparison of ADV and PIV measurements in open channel flows*. Procedia Engineering, 154, 995-1001. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.588>

[20] Trần Công Triệu, Trịnh Công Tý (2025). *Xác định độ sâu liên hợp, chiều dài nước nhảy và ứng suất đáy đối với nước nhảy trên nền nhám lồi trụ chữ nhật bằng mô hình mạng Nơ-ron nhân tạo*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải, 84, 181-189. doi: <https://doi.org/10.65154/jmst.2025.i84.877>

[21] Samadi-Boroujeni, H. et al. (2013). *Effect of triangular corrugated beds on the hydraulic jump characteristics*. Canadian Journal of Civil Engineering, 40(9), 841-847. doi: <https://doi.org/10.1139/cjce-2012-0019>.

[22] Rajaratnam, N. (1976). *Turbulent jets*. Elsevier. DOI:10.1017/s0001924000034540.