

TIẾP CẬN CÁC MÔ HÌNH VẬT LIỆU TIỀN TIẾN  
TRONG CƠ HỌC CÔNG TRÌNH: ỨNG DỤNG MÔ HÌNH GRADIENT BẬC HAI  
APPROACHING ADVANCED MATERIAL MODELS IN STRUCTURAL MECHANICS:  
APPLICATION OF THE SECOND GRADIENT MODEL

TRỊNH DUY KHÁNH<sup>a,\*</sup>, NGUYỄN VĂN CƯỜNG<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

\*Tác giả đại diện: Email: khanhtd@huce.edu.vn

Ngày nhận 06/03/20226, Ngày sửa 22/03/2026, Chấp nhận 24/3/2026

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2026.vi.vol1-1>

Tóm tắt: Quan hệ ứng suất - biến dạng của vật liệu (kích thước vi mô) sẽ ảnh hưởng đến sự làm việc của cấu kiện, kết cấu (kích thước vĩ mô). Trong công trình xây dựng, các vật liệu phổ biến (bê tông, bê tông cốt thép, đá, đất nền, gỗ...) đều không đáp ứng được những giả thuyết về đồng nhất, đẳng hướng. Chính vì vậy, mô hình vật liệu đàn hồi Hooke, mặc dù được sử dụng phổ biến trong tính toán kết cấu công trình, nhưng luôn phải đi kèm các hệ số (được qui định cụ thể trong các tiêu chuẩn). Vì vậy, nhu cầu về các mô hình vật liệu có thể mô tả chính xác ứng xử của các loại vật liệu không đồng nhất (ở mức mắt thường có thể nhìn thấy) là rất lớn trong nghiên cứu cơ học công trình. Những năm gần đây, các mô hình cơ học liên tục mở rộng (mô hình Cosserat, mô hình gradient bậc hai, mô hình micromorphe...) đang nổi lên như những ứng viên tiềm năng đáp ứng nhu cầu đó. Các mô hình này được mở rộng từ mô hình Cauchy bằng cách thêm vào các bậc tự do, hoặc bằng cách xét thêm vào các gradient bậc cao của chuyển vị. Chúng đều dẫn đến việc phải tạo thêm các ma trận mới (có vai trò tương tự như ma trận độ cứng  $K$  trong lý thuyết phần tử hữu hạn), và đưa chúng vào các phần mềm PTHH (nói cách khác là tạo ra các phần tử hữu hạn mới). Bài báo này sẽ giới thiệu một cách tiếp cận trực tiếp hơn với các mô hình vật liệu tiên tiến nói trên, bằng cách khai thác các ứng xử vật liệu đã được công bố, kết hợp với phương trình nghiệm yếu mô tả bài toán cơ học. Tác giả sẽ đưa ra ví dụ khai thác mô hình gradient bậc hai để mô phỏng sự làm việc của một cấu kiện xây dựng.

Từ khóa: mô hình vật liệu tiên tiến, môi trường liên tục tổng quát, gradient bậc hai, ứng suất bội, ứng suất kép, phương trình nghiệm yếu.

Abstract: Stress-strain relationships of materials in micro-scale has an influence on structural behaviors. Practically, neither homogeneous nor

isotropy assumptions cannot be applied to common construction materials (concrete, rock, etc.). Hence, the application of Hooke's elastic material should always be accompanied by various factors (from design codes) in structural designs. Therefore, there is a need for advanced material models, which can describe the heterogeneous material (visible to bare eyes), in research of mechanics of construction work. Recently, generalized continuum models (Cosserat, micromorphe, secondgradient...) are presented as potential candidates replying to this requirement. These studies are extended from Cauchy model by considering either more degrees of freedom or adding higher-order gradient of displacement. The latter leads to the establishment of a new matrix (similar to stiffness matrix  $K$  in finite element method). From that, new elements should be created by implementing these matrixes to engineering tools such as FEM softwares. The present paper proposes a direct approach to adopt the above-mentioned models via using the published stress-strain relationship as well as weak formulation describing the mechanical problem. An elastic second-gradient model will be used as an example.

Keywords: advanced material model, generalized continuum, second gradient, hyperstress, double stress, weak formulation.

### 1. Vai trò của phương trình nghiệm yếu trong các phần mềm phần tử hữu hạn

Các vấn đề cơ học thường được đưa về một bài toán giải phương trình vi phân, trong đó chuyển vị của vật rắn (dưới tác động của lực cơ học hay nhiệt độ) là nghiệm cần tìm. Các đạo hàm bậc nhất của nghiệm này, hợp thành tensor biến dạng, thường ký hiệu là  $\xi$ , phải thỏa mãn điều kiện tương thích hay có tài liệu gọi là điều kiện biến dạng. Tensor biến dạng có liên hệ với tensor ứng suất  $\sigma$  thông qua ứng xử của vật liệu; mô hình cơ bản, nổi tiếng nhất và được giảng dạy rộng rãi trong tất cả các ngành kĩ

thuật là mô hình vật liệu đàn hồi Hooke. Tensor ứng suất hay trạng thái ứng suất phải thỏa mãn điều kiện cân bằng giữa nội lực và ngoại lực  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ ; trong đó  $\sigma_{ij,j}$  là divergence của ứng suất,  $f_i$  là các thành phần của vector lực khối. Hệ phương trình (1) thể hiện mô hình toán học của bài toán cơ học đơn giản trong đó trọng tâm là phương trình cân bằng, có dạng một phương trình vi phân (PTVP) bậc hai, mô tả một kết cấu (miền  $\Omega$ ) chịu tác dụng của ngoại lực trên vùng biên  $\partial V^F$ , và chịu chuyển vị cưỡng bức trên vùng biên  $\partial V^D$ ; kết cấu được tạo nên bởi vật liệu đàn hồi, có ma trận độ cứng  $C_{ijkl}$  liên kết tensor biến dạng  $\varepsilon$  và tensor ứng suất  $\sigma$ .

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_D \quad \underline{x} \in \partial V^D \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) \cdot \underline{n} = \underline{t} \quad \underline{x} \in \partial V^F \end{cases} \quad (1)$$

trong đó, các chỉ số  $i, j$  được sử dụng trong công thức (1) có giá trị từ 1 đến 3; dùng để chỉ các hướng trong hệ tọa độ Descartes và tuân theo qui ước Einstein. Như vậy, vấn đề cơ học đã được mô hình hóa bởi các biểu thức, phương trình toán học và việc giải quyết vấn đề cơ học được chuyển thành việc giải hệ PTVP riêng phần.

Việc giải PTVP (vi phân thường hoặc vi phân riêng phần) có thể được thực hiện theo nhiều phương pháp khác nhau, có thể là lời giải giải tích (tìm ra nghiệm đúng dưới dạng các hàm số liên tục) hoặc lời giải xấp xỉ bằng phương pháp số. Trong đó, nổi lên hai phương pháp số rất phổ biến là sai phân hữu hạn và phần tử hữu hạn. Nếu sai phân hữu hạn giải PTVP bằng cách xấp xỉ phương trình (đưa phương trình hay bài toán ban đầu về một hệ phương trình gần đúng, có lời giải dễ dàng và có nghiệm đúng của phương trình đơn giản hóa); thì phương pháp phần tử hữu hạn lại tiến hành biến đổi PTVP ban đầu thành một phương trình tương đương dạng tích phân, còn gọi là phương trình nghiệm yếu thông qua các hàm thử; sau đó đưa ra nghiệm của bài toán tích phân (xấp xỉ nghiệm); nghiệm này có tên là nghiệm yếu [1]. Bắt đầu từ phương trình nghiệm yếu này, các bước rời rạc hóa để xây dựng một phần tử hữu hạn được thực hiện. Trong quá trình đó, các mô hình vật liệu (hay quan hệ ứng suất-biến dạng) trở thành một phần thông

tin nằm trong ma trận độ cứng  $K$ . Các phần mềm PTHH đều hoạt động dựa trên phương trình nghiệm yếu, tuy nhiên, để tạo thuận lợi cho người sử dụng, phương trình nghiệm yếu này thường được ẩn đi, thay vào đó, người ta lập trình các phần tử riêng biệt, các giao diện trực quan và đưa các mô hình vật liệu vào phần mềm. Như vậy, đối với các mô hình vật liệu cổ điển, quen thuộc, được thừa nhận rộng rãi, các kĩ sư có thể dễ dàng sử dụng các phần mềm PTHH thương mại được thiết kế chuyên biệt dành cho nhiều nhu cầu khác nhau. Tuy nhiên, các công cụ vừa nêu lại không thể sử dụng cho việc nghiên cứu, mô phỏng sự làm việc của cấu kiện dựa trên các mô hình vật liệu mới phát triển. Mặt khác, một đặc điểm quan trọng của phần tử hữu hạn là việc nhúng hay cấy ghép các mô hình đã được thiết lập vào các phần mềm PTHH sẵn có là khó khăn, đòi hỏi phải có những kĩ năng lập trình, mã hóa rất thành thạo, phải có hiểu biết sâu về phương pháp phần tử hữu hạn và có cả những kiến thức cơ bản về mảng ngành kĩ thuật liên quan đến mô hình đang nghiên cứu. Vấn đề này có thể khắc phục nhờ tận dụng những phần mềm PTHH có các modul cho phép giải trực tiếp các PTVP bằng phương pháp PTHH thông qua việc nhập vào phương trình nghiệm yếu và định nghĩa cụ thể ứng xử vật liệu. Một số phần mềm dạng này có thể kể đến Comsol, Matlab, Fecnic, FreeFEM [2, 3, 4, 5]. Trong phần tiếp theo, tác giả sẽ giới thiệu sơ lược về một số mô hình vật liệu mới trong công trình xây dựng, trong đó có mô hình gradient bậc hai là mối quan tâm lớn gần đây của giới nghiên cứu cơ học; sau đó đưa ra một bài toán cơ học với những điều kiện biên, mô hình vật liệu cụ thể và trình bày cách đưa (hay có thể dùng từ nhúng hoặc cấy - implement) vật liệu mới này vào một phần mềm PTHH thông qua phương trình nghiệm yếu.

**2. Mô hình gradient bậc hai và việc ứng dụng trong phân tích kết cấu**

**2.1 Môi trường liên tục tổng quát**

Lý thuyết cơ học môi trường liên tục gắn liền với tên tuổi của nhà khoa học Cauchy, trong đó một điểm vật chất trong môi trường có ba bậc tự do (chuyển vị trong không gian ba chiều). Lý thuyết này được tổng quát hóa và xây dựng thành lý thuyết cơ học môi trường liên tục tổng quát. Theo [6, 7, 8], cột mốc đáng kể đầu tiên của lý thuyết này là công trình

của hai nhà khoa học (hai anh em ruột) người Pháp Eugene và Francois Cosserat. Trong công trình [9] chung của hai người, có tên *Théorie des corps déformables*, các tác giả đã mô tả một điểm vật chất có sáu bậc tự do: ba chuyển vị độc lập ( $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$ ) và ba góc xoay độc ( $\underline{\phi} = \phi_1 \underline{e}_1 + \phi_2 \underline{e}_2 + \phi_3 \underline{e}_3$ ) trong không gian ba chiều, các điểm vật chất này hình thành nên môi trường Cosserat hay môi trường vi cực; để thấy khi ba góc xoay suy biến bằng không, môi trường Cosserat suy biến về dạng môi trường cổ điển của Cauchy (hay môi trường Cauchy là một dạng đặc biệt của môi trường Cosserat). Một mô hình khác có chung nguyên lý thêm các bậc tự do cho chất điểm là Micro-morphic, trong đó một tensor bậc hai mô tả biến dạng vi mô của chất điểm  $\chi_{ij}$  được thêm vào môi trường Cauchy. Ngoài những mô hình bổ sung thêm bậc tự do, một họ các mô hình khác được xây dựng nên từ môi trường Cauchy bằng cách xét thêm tác động của các gradient bậc cao của chuyển vị, đồng thời đưa vào thêm những khái niệm như ứng suất bội; trường hợp đặc biệt của họ các mô hình này là mô hình gradient bậc hai (hay mô hình gradient biến dạng). Trong mô hình này, phương trình cân bằng của ứng suất có thêm các thành phần là gradient của biến dạng và ứng suất liên quan đến gradient này gọi là ứng suất đúp. Các khái niệm mới này được giải thích khá cặn kẽ trong [10]. Đối với phân tích kết cấu nói chung, mô hình gradient bậc hai đã được áp dụng khá nhiều, nhất là trong các bài toán địa cơ học, chẳng hạn trong [11]. Việc ứng dụng mô hình nói trên vào kết cấu bê tông và bê tông cốt thép cũng bắt đầu có những nghiên cứu tiên phong, chẳng hạn [12, 13, 14]. Việc lựa chọn mô hình gradient bậc hai trong số các mô hình của cơ học môi trường liên tục cũng rất tự nhiên,

khi mà ảnh hưởng của gradient biến dạng trong nghiên cứu về sự làm việc của bê tông đã được ghi nhận từ lâu [15, 16, 17, 18, 19].

**2.2 Bài toán yếu của kết cấu chịu lực với mô hình gradient bậc hai**

Bài toán kết cấu chịu lực (chuyển vị cưỡng ép và ngoại lực) quen thuộc trong cơ học được trình bày trong công thức (1). Việc mở rộng từ mô hình đàn hồi Cauchy sang mô hình đàn hồi gradient bậc hai dẫn đến phải mở rộng bài toán vừa nêu thành bài toán mới trong công thức (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{ij,j} = 0 \\ \Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - m_{ijk,k} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ m_{ijk} = A_{ijkpqr} \cdot k_{ijk} \cdot k_{pqr} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ k_{i,jk} = u_{i,jk} \\ \text{Boundary conditions} \end{array} \right. \quad (2)$$

trong đó,  $C_{ijkl}$  và  $A_{ijkpqr}$  là các hằng số đàn hồi liên quan đến biến dạng  $\varepsilon_{kl}$  và gradient của biến dạng  $k_{ijk}$ ;  $m_{ijk}$  là ứng suất đúp, cần nhắc rằng đây là thuật ngữ mới và ý nghĩa vật lý của nó đã được giải thích trong [10]. Mặt khác, để đảm bảo tính ngắn gọn, từ đây bài báo sẽ chỉ đề cập đến trường hợp biến dạng phẳng ( $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ ). Mô hình vật liệu hay luật ứng xử đàn hồi của một vật liệu đồng nhất, đẳng hướng được sử dụng phổ biến trong môi trường Cauchy thường có dạng biểu diễn ma trận như trong công thức (3).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3)$$

trong đó,  $C_{1111} = C_{11} = C_{22} = C_{2222}$  đối với vật liệu đẳng hướng. Các luật ứng xử cơ bản này thông thường đều được lập trình sẵn trong các phần mềm phần tử hữu hạn (cả thương mại và mã nguồn mở). Một số phần mềm cho phép đưa các luật ứng xử vào bài toán dưới dạng các biểu đồ rời

rạc quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Tuy nhiên, các mô hình vật liệu mới với những bậc tự do mới và đạo hàm bậc cao của biến dạng chưa được đưa vào các phần mềm thương mại phổ biến, được các kĩ sư sử dụng rộng rãi. Một vài phần mềm chuyên biệt dành cho giới nghiên cứu, chẳng

hạn Code-Aster, code Zébulon..., có nhúng sẵn các đoạn mã mô tả một số mô hình đã đề cập trong 2.1 thì lại không có các giao diện “thân thiện” với người dùng, hay nói cách khác là khó sử dụng; hoặc các phần tử được lập trình sẵn đó lại bị giới hạn, chẳng hạn chỉ sử dụng trong trường hợp ứng

suất phẳng. Trong bài báo này, mô hình vật liệu theo lý thuyết gradient bậc hai (hay gradient biến dạng), thể hiện trong công thức (4), sẽ được đưa vào phần mềm Comsol thông qua giao diện phương trình đạo hàm riêng (PDE interface) của phần mềm.

$$\begin{pmatrix} m_{111} \\ m_{122} \\ m_{212} \\ m_{222} \\ m_{211} \\ m_{112} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111111} & A_{111122} & A_{111212} & 0 & 0 & 0 \\ A_{111122} & A_{122122} & A_{122212} & 0 & 0 & 0 \\ A_{111212} & A_{122212} & A_{212212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{111111} & A_{111122} & A_{111212} \\ 0 & 0 & 0 & A_{111122} & A_{122122} & A_{122212} \\ 0 & 0 & 0 & A_{111212} & A_{122212} & A_{212212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{111} \\ k_{122} \\ k_{212} \\ k_{222} \\ k_{211} \\ k_{112} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Phương trình cân bằng (phương trình đạo hàm riêng) của bài toán cơ học với môi trường gradient bậc hai thể hiện trong công thức (2) được chuyển về dạng phương trình nghiệm yếu (5) bởi [11], bằng cách sử dụng một hàm thử (test

function)  $v$  của hàm chuyển vị  $u$ . Dựa trên phương trình nghiệm yếu này, việc lập trình PTHH đã được thực hiện để đưa vào phần mềm Code-Aster, do tập đoàn Điện lực Pháp (EDF) nghiên cứu và phát triển.

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + m_{ijk} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) dV = \int_{\partial\Omega} (p_i v_i + P_i Dv_i) ds \tag{5}$$

trong đó:  $v_i$  là hàm thử chuyển vị,  $p_i$  và  $P_i$  là điều kiện biên lực và lực đúp, được định nghĩa bởi:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j - n_k n_j Dm_{ijk} - \frac{Dm_{ijk}}{Dx_k} n_j - \frac{Dm_{ijk}}{Dx_j} n_k + \frac{Dn_l}{Dx_l} m_{ijk} n_j n_k - \frac{Dn_j}{Dx_k} m_{ijk} \tag{6}$$

$$P_i = m_{ijk} n_j n_k \tag{7}$$

trong đó, các qui ước về đạo hàm pháp tuyến  $Dq$  và đạo hàm tiếp tuyến  $\frac{Dq}{Dx_j}$  của  $q$  như sau:

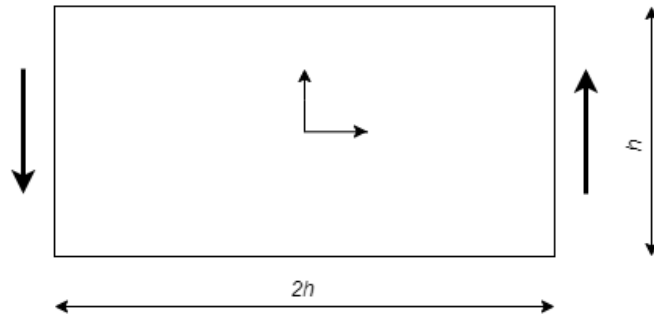
$$Dq = \frac{\partial q}{\partial x_j} n_j \text{ và } \frac{Dq}{Dx_j} = \frac{\partial q}{\partial x_j} - n_j Dq \tag{8}$$

**3. Ví dụ áp dụng**

**3.1 Bài toán và nghiệm giải tích**

Bài toán được đưa ra xem xét là một cấu kiện hình chữ nhật làm từ vật liệu đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng; quan hệ ứng suất, biến dạng tuân theo lý thuyết gradient bậc hai (các phương trình (3) và (4)); chịu tác dụng của chuyển vị ngược chiều

n nhau trên hai cạnh ngắn, hai cạnh dài tự do như trong Hình 1. Mô hình tám đàn hồi trong ví dụ này có thể sử dụng để mô phỏng các cấu kiện xây dựng chịu cắt trong mặt phẳng. Tương tự như việc các nghiên cứu [12,13,14] đã sử dụng mô hình gradient bậc hai để mô phỏng sự làm việc trong các cấu kiện bê tông cốt thép... Các giá trị của tensor độ cứng vật liệu được nêu ra trong Bảng 1.



Hình 1. Bài toán cấu kiện chịu cắt trong mặt phẳng

Bảng 1. Các modul đàn hồi của vật liệu theo mô hình gradient bậc hai: bốn modul đầu tiên đơn vị là MPa, các modul còn lại có đơn vị MPamm<sup>2</sup>

$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$C_{66}$	$A_{111111}$	$A_{122122}$	$A_{212212}$	$A_{111122}$	$A_{111212}$	$A_{122212}$
10	5	$C_{11}$	7480	100	-4879325,831	100	100	100	100

Các giá trị  $C_{66}$  và  $A_{122122}$  đã được tìm ra trong [20] nhờ việc đồng nhất hóa một vật liệu hai pha, có độ cứng rất chênh lệch. Điều kiện biên của bài toán được thể hiện trong công thức (9).

$$u_2(x_1 = h) = \frac{\delta}{2} e_2 \quad \text{và} \quad u_2(x_1 = -h) = \frac{-\delta}{2} e_2 \quad (9)$$

Bài toán trên có nghiệm giải tích được nêu trong [21, 22]. Nghiệm này được nhắc lại trong công thức (10) để thuận tiện theo dõi:

$$u_2(x_1) = u(x) = \frac{C_1}{\omega^2} \cosh(\omega x) + \frac{C_2}{\omega^2} \sinh(\omega x) + C_3 x + C_4 \quad (10)$$

trong đó: 1, 2 lần lượt là trục nằm ngang, trục thẳng đứng trong mặt phẳng,  $u(x)$  là tên gọi rút gọn được đặt cho  $u_2(x_1)$ ,  $C_1 = C_4 = 0$ ,  $\omega^2 = \frac{C_{1212}}{A_{122122}}$ ,

$$C_2 = \frac{\delta}{2 \left[ \frac{\sinh(\omega h)}{\omega^2} - \frac{h}{\omega} \cosh(\omega h) \right]} \quad \text{và} \quad C_3 = \frac{-C_2}{\omega} \cosh(\omega h) \quad (11)$$

trong đó: cấu kiện có kích thước  $h \times 2h$ ;  $h$  có giá trị là 150 mm trong trường hợp đang xét; gốc tọa độ trùng với tâm hình học của cấu

kiện chữ nhật. Từ công thức (10), ta có thể suy ra các đạo hàm bậc nhất và bậc hai của chuyển vị:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{C_2}{w} \cosh wx + C_3 \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = C_2 \sinh wx \quad (12)$$

### 3.2 Đưa mô hình gradient bậc hai vào phần mềm

Trong phần này, tác giả sẽ tóm tắt những bước cơ bản để sử dụng phần mềm Comsol khai báo phương trình nghiệm yếu đã nêu trong (5). Đầu tiên, cần chọn không gian 2D cho bài toán thông qua *Model Wizards > Select Space Dimensions > 2D*. Lựa chọn khai báo phương trình nghiệm yếu theo các bước *Select Physics > Mathematics > PDE Interfaces > Weak Form PDE*, sau đó chọn số

lượng biến phụ thuộc là 2 và tên biến ( $u_1, u_2$ ) nhờ khai báo theo các bước *Review Physics Interface > Number of dependent variables > 2 >  $u_1, u_2$* . Khai báo kiểu bài toán phân tích tĩnh *Select Study > Preset Study: Stationary*. Khai báo các thông số hệ số độ cứng  $C_{ijk}$  và  $A_{ijkpqr}$  và giá trị của  $h$  trong *Global Definitions > Parameters*. Khai báo các quan hệ được liệt kê ở các bài toán (1), (2) vào *Component > Definition*. Dựng một hình chữ nhật có kích thước là  $h \times 2h$ , tâm hình học trùng với gốc tọa độ nhờ vào

gói công cụ *Component > Geometry* của Comsol. Khai báo vế trái của phương trình (5) vào phần mềm theo các gói lệnh *Component > Weak Form PDE > Weak Expression*, và khai báo điều kiện biên chuyển vị theo lệnh *Dirichlet boundary condition*.

Cần lưu ý, các thành phần của hàm thử  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  và

$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j}$  được khai báo dưới dạng các câu lệnh bắt

buộc của phần mềm Comsol: test (u1x) hoặc test (u2xx)... Chia lưới như các phần mềm PTHH khác: *Component > Mesh*, chọn mức chia *Normal*. Thực

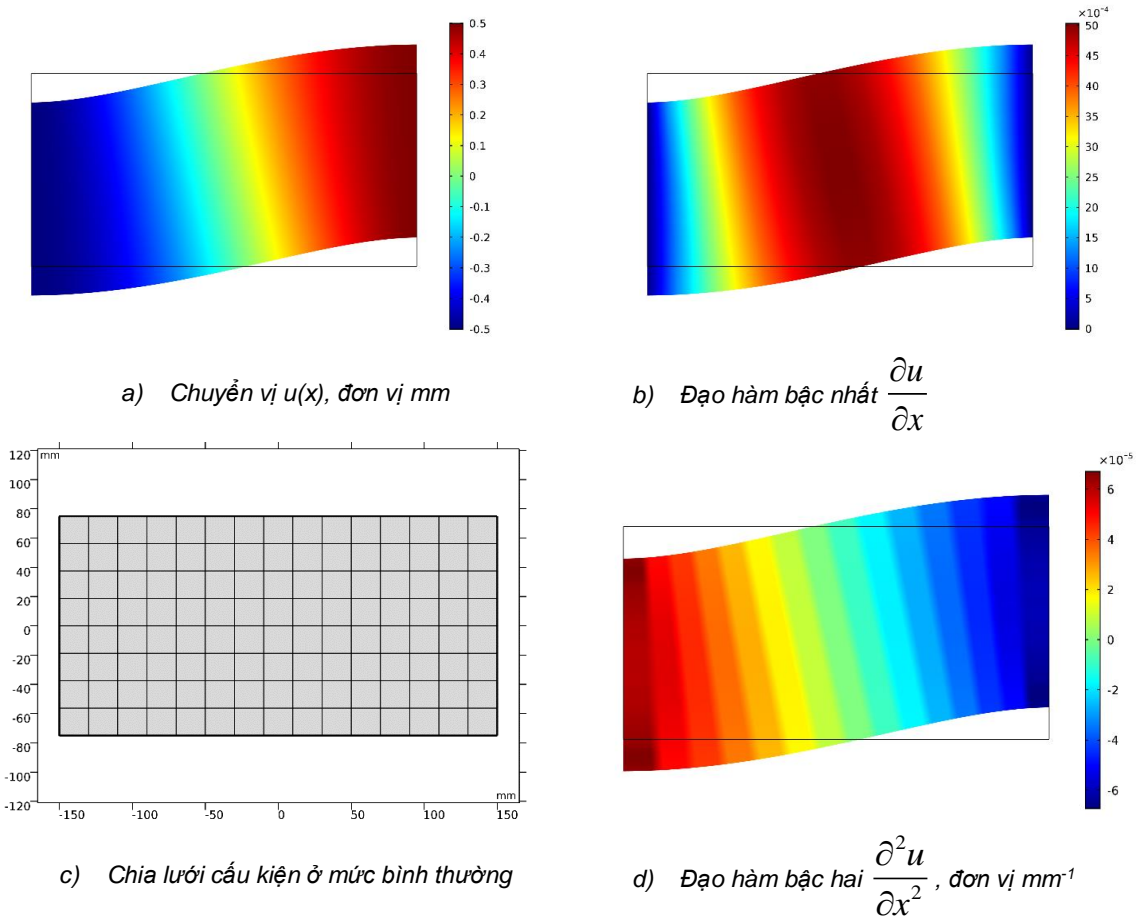
hiện lệnh tính toán *Study > Compute the selected study*

**3.3 Kết quả mô phỏng**

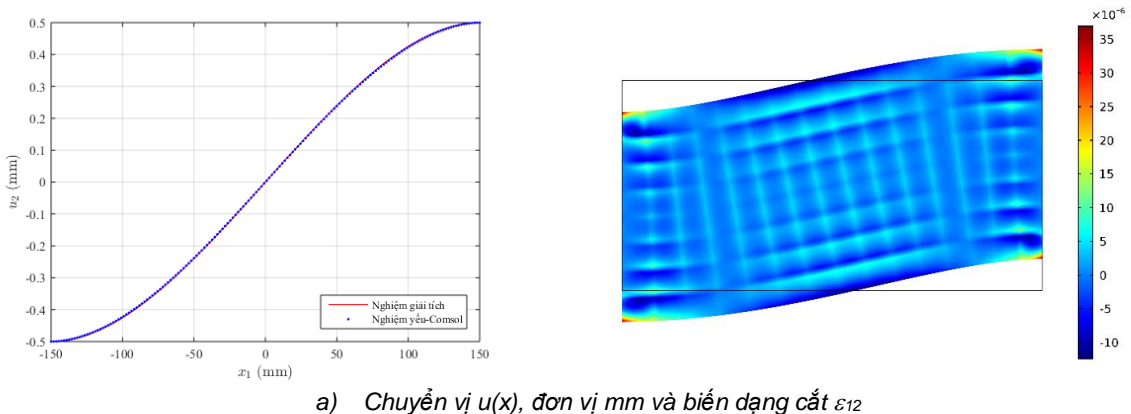
Sau khi để Comsol giải quyết phương trình nghiệm yếu bằng phương pháp PTHH, ta thu được kết quả phân tích chuyển vị thẳng đứng  $u(x) = u_2(x_1)$

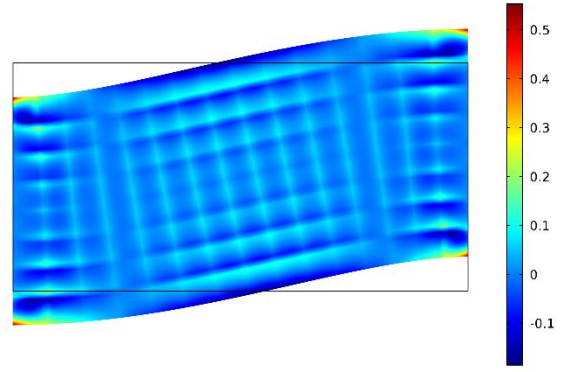
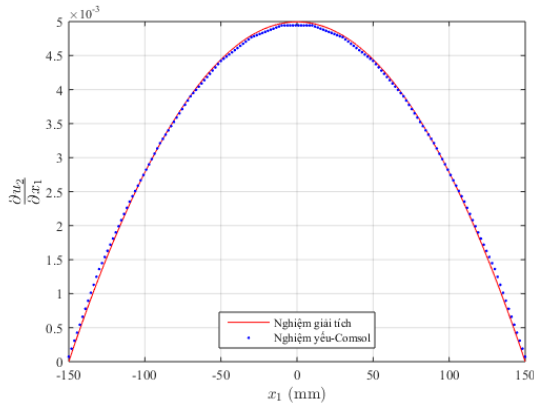
và các gradient của nó  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (Hình 2). Đem

so sánh các giá trị thu được nhờ giải nghiệm yếu trong công thức (5), với nghiệm giải tích được trình bày trong công thức (10) ta thu được các biểu đồ so sánh trong Hình 3.

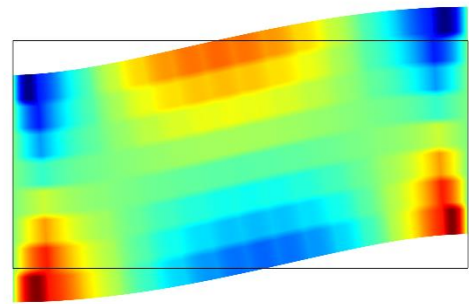
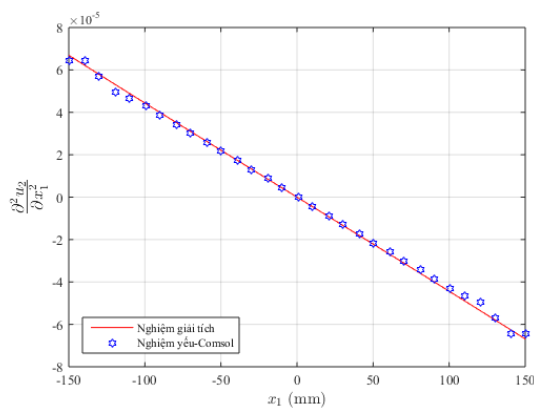


**Hình 2.** Hình ảnh biến dạng của cấu kiện và phổ giá trị





b) Đạo hàm bậc nhất  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , và ứng suất  $\sigma_{12}$



c) Đạo hàm bậc hai  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , đơn vị  $mm^{-1}$  và ứng suất đúp  $m_{211}$

**Hình 3.** So sánh nghiệm giải tích với nghiệm yếu, cùng một số các trường ứng suất, biến dạng, ứng suất đúp trong mô hình gradient bậc hai

#### 4. Kết luận

Việc ứng dụng các mô hình vật liệu tiên tiến vào mô phỏng ứng xử của cấu kiện xây dựng thường gặp nhiều trở ngại do khó khăn trong việc nhúng các mô hình tiên tiến vào các phần mềm phần tử hữu hạn thương mại thông thường. Nhằm khắc phục hạn chế này, bài báo đã đề xuất và chứng minh tính hiệu quả của phương pháp sử dụng phương trình nghiệm yếu kết hợp với các phần mềm giải phương trình vi phân riêng phần.

Từ những nội dung đã trình bày, nghiên cứu rút ra các kết luận chính như sau:

- Đơn giản hóa việc áp dụng mô hình mới: Phương pháp khai báo trực tiếp phương trình nghiệm yếu cho phép các kĩ sư và nhà nghiên cứu dễ dàng nhúng các mô hình vật liệu phức tạp (như mô hình gradient bậc hai) vào phần mềm (cụ thể là Comsol Multiphysics) mà không đòi hỏi phải lập

trình phần tử hữu hạn từ đầu;

- Độ tin cậy cao của phương pháp số: Thông qua việc mô phỏng một bài toán cấu kiện chịu lực cắt trong mặt phẳng (đại diện cho vách bê tông cốt thép), kết quả giải bằng phương pháp nghiệm yếu trên phần mềm cho thấy sự trùng khớp gần như hoàn toàn với nghiệm giải tích của bài toán;

- Tiềm năng mở rộng: Cách tiếp cận được giới thiệu trong nghiên cứu này không chỉ giới hạn ở mô hình gradient bậc hai mà hoàn toàn có thể được mở rộng để mô phỏng, tính toán các bài toán cơ học khác sử dụng các lý thuyết môi trường liên tục tổng quát và các mô hình vật liệu tiên tiến khác.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tạ, V. (2002). *Phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn: Giáo trình ngành Toán - tin Đại học Bách Khoa Hà Nội*. NXB Khoa học và kỹ thuật.

- [2] COMSOL-Group (2006). *Comsol Multiphysics Version 4.4. User's guide*. COMSOL.
- [3] MathWorks, I. (2002). *Partial Differential Equation Toolbox for Use with MATLAB: User's Guide*. Computation, visualization, programming, MathWorks, Incorporated.
- [4] Hans Petter Langtangen, A. L. (2017). *Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial I*. Simula Springer Briefs on Computing, Springer, 1 edn.
- [5] Hecht, F. (2012). *New development in freefem++*. J. Numer. Math., 20, 251–265.
- [6] Altenbach, H., Eremeyev, V.-A., Forest, S., and Krivtsov, A. (2013). *Generalized Continua as Models for Materials: with Multi-scale Effects or Under Multi-field Actions*. Advanced Structured Materials 22, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edn.
- [7] Maugin, G. and Metrikine, A. (2010). *Mechanics of Generalized Continua: One Hundred Years After the Cosserats*. Advances in Mechanics and Mathematics 21, Springer-Verlag New York, 1 edn.
- [8] Altenbach, H., Maugin, G.-A., and Erofeev, V. (2011). *Mechanics of Generalized Continua*. Springer Berlin Heidelberg.
- [9] Cosserat, E. M. P. and Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Hermann Archives, A. Hermann et fils, 2009 edn.
- [10] Polizzotto, C. (2016). *A note on the higher order strain and stress tensors within deformation gradient elasticity theories: Physical interpretations and comparisons*. International Journal of Solids and Structures, 90, 116–121.
- [11] Chambon, R., Caillerie, D., and Matsushima, T. (2001). *Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies*. International Journal of Solids and Structures, 38, 8503–8527.
- [12] Kotronis, P., Chambon, R., Mazars, J., and Collin, F. (2005). *Local second gradient models and damage mechanics: Application to concrete*. 11th International Conference on Fracture, ICF11, vol. 3.
- [13] Jouan, G., Soufflet, M., Kotronis, P., and Collin, F. (2017). *Second Gradient Models and Concrete Structures*. Springer, Cham.
- [14] Jouan, G., Kotronis, P., and Collin, F. (2014). *Using a second gradient model to simulate the behaviour of concrete structural elements*. Finite Elements in Analysis and Design, 90, 50–60.
- [15] Bascoul, A., Ollivier, J. P., and Poushanchi, M. (1989). *Stable microcracking of concrete subjected to tensile strain gradient*. Cement and Concrete Research, 19, 81–88.
- [16] Gribniak, V., Jakubovskis, R., Rimkus, A., Ng, P.-L., and Hui, D. (2018). *Experimental and numerical analysis of strain gradient in tensile concrete prisms reinforced with multiple bars*. Construction and Building Materials, 187, 572–583.
- [17] Ho, J. C. M. and Peng, J. (2011). *Strain gradient effects on flexural strength design of normal-strength concrete columns*. Engineering Structures, 33, 18–31.
- [18] Iliopoulos, S. N., Aggelis, D. G., and Polyzos, D. (2016). *Wave dispersion in fresh and hardened concrete through the prism of gradient elasticity*. International Journal of Solids and Structures, 78-79, 149–159.
- [19] Indriyantho, B. R., Zreid, I., and Kaliske, M. (2019). *Finite strain extension of a gradient enhanced microplane damage model for concrete at static and dynamic loading*. Engineering Fracture Mechanics, 216, 106501.
- [20] Duy-Khanh, T. (2020). *Second gradient substitution model for high contrast bi-phase structure*. Journal of Science and Technology in Civil Engineering (NUCE), 14, 116–126.
- [21] Trinh, D. (2011). *Méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les matériaux architecturés*. Phd thesis in french, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [22] Bacigalupo, A. and Gambarotta, L. (2010). *Second-order computational homogenization of heterogeneous materials with periodic microstructure*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 90, 796–811.