

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA VỎ TRÒN XOAY CƠ TÍNH BIẾN THIÊN TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỆT ĐỘ

BUCKLING ANALYSIS OF FGM SHELLS OF REVOLUTION IN THERMAL ENVIRONMENT

ĐỖ QUANG CHÂN^{a*}

^aTrường Đại học Phenikaa

*Tác giả đại diện: Email: chan.doquang@phenikaa-uni.edu.vn

Ngày nhận 01/6/2024, Ngày sửa 26/6/2024, Chấp nhận 30/6/2024

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2024.vi.vol2-2>

Tóm tắt: Bài báo trình bày một nghiên cứu nhằm phân tích sự ổn định cơ học của vỏ tròn xoay làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên, chịu tải trọng áp lực ngoài phân bố đều, có tính đến ảnh hưởng của việc tăng nhiệt độ đồng đều. Tính chất cơ học của vật liệu biến thiên theo hướng độ dày của vỏ theo quy luật lũy thừa, phân bố liên tục phụ thuộc vào tỷ phần thể tích của các vật liệu cấu thành vỏ. Sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận và tuyến tính hóa giới hạn ở đại lượng nhỏ bậc hai đã thiết lập được các phương trình ổn định của vỏ dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển. Các phương trình thu được là hệ ba phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính có hệ số là hàm số đối với các thành phần chuyển vị. Các phương trình này được giải theo phương pháp Galerkin. Kết quả tính toán thu được biểu thức dạng đóng để xác định tải trọng uốn tới hạn. Phần tính toán số khảo sát ảnh hưởng của đặc tính vật liệu, các thông số kích thước hình học và nhiệt độ đến khả năng mất ổn định của vỏ.

Từ khóa: Vật liệu cơ tính biến thiên (FGM), Vỏ tròn xoay FGM; Ổn định; Tải tới hạn tĩnh; Nhiệt độ.

Abstract: This work presents an analytical investigation for analyzing the mechanical buckling of shells of revolution made of functionally graded materials, subjected to external uniform pressure taking into account the effects of uniform temperature rise. The material compositions only vary smoothly along its thickness direction with the power law distribution. Using the adjacent equilibrium criterion and classical shell theory, the linearization stability equations have been established. The resulting equations which they are the system of three variable coefficient partial differential equations in terms of displacement components are investigated by Galerkin method. The closed-form expression for determining the

critical buckling load is obtained. In numerical results, the effects of material properties, dimensional parameters, and temperature on the buckling of shells of revolution are discussed in details.

Keywords: Functionally graded material (FGM); FGM shells of revolution; Buckling; Critical buckling load; Thermal environment

1. Mở đầu

Các kết cấu chế tạo từ vật liệu cơ tính biến thiên (Functionally graded Material - FGM) được sử dụng ngày càng nhiều trong công nghiệp hàng không vũ trụ, lò phản ứng hạt nhân và các lĩnh vực làm việc trong môi trường nhiệt độ cao hoặc chịu tải phức tạp [1]. Do các tính chất cơ lý biến đổi trơn và liên tục từ mặt này đến mặt kia nên các kết cấu FGM tránh được sự tập trung ứng suất trên bề mặt tiếp xúc giữa các lớp, tránh được sự bong tách và rạn nứt trong kết cấu. Do vậy nghiên cứu về ổn định, dao động và độ bền của các kết cấu FGM đã thu hút được sự chú ý đặc biệt của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Hiện nay, những kết cấu vỏ tròn xoay FGM như vỏ nón, vỏ cầu, vỏ gấp nếp lượn sóng hay có gân gia cường vẫn là những bài toán khó, còn ít được nghiên cứu. Trong khi đó những kết cấu loại này đã trở nên phổ biến trong ứng dụng thực tế. Nghiên cứu về ứng xử cơ học của chúng là bài toán không chỉ có ý nghĩa khoa học mà còn có ý nghĩa thực tiễn to lớn.

Về ổn định, ngoài các kết quả đối với dầm và tấm, những kết quả đối với vỏ đã được quan tâm nghiên cứu và phát triển. Huang và Han [2] đã trình bày các nghiên cứu phi tuyến sau vòng của vỏ trụ FGM không gia cường, chịu áp lực ngoài bằng cách sử dụng lý thuyết độ võng lớn phi tuyến của vỏ tròn trụ. Trong công trình này đã tính đến dạng vòng phi

tuyến được quan sát từ thực nghiệm. Các phân tích sau vòng của vỏ trụ FGM, không gia cường, chịu áp lực ngoài trên nền đàn hồi theo mô hình Pasternak, bằng cách sử dụng phương pháp tham số bé và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, đã được nghiên cứu bởi Shen trong [3]. Bagherizadeh [4] đã nghiên cứu sự vòng cơ học của vỏ trụ FGM, không gia cường, trên nền đàn hồi Pasternak, dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao. Najafizadeh [5] đã đưa ra phương trình ổn định theo chuyển vị, đã khảo sát ứng xử vòng cơ học của vỏ trụ FGM, được gia cường bởi các gân vòng và các gân dọc FGM, dựa trên lý thuyết vỏ kinh điển. Trong nước, kết quả tiếp cận giải tích để nghiên cứu về ổn định phi tuyến cho panel trụ có cơ tính biến thiên chịu nén dọc trục, chịu tải cơ nhiệt đã được nghiên cứu bởi Đức và cộng sự [6, 7]. Các tác giả đã tìm được biểu thức hiển của tải vòng và đường cong tải-độ võng sau vòng trong trường hợp hệ số Poisson là hằng số và điều kiện biên tựa bản lề. Tác giả Bích và nhóm nghiên cứu [8] đã nghiên cứu ứng xử vòng tĩnh và động phi tuyến của vỏ mỏng hình trụ, được gia cường lệch tâm, bằng phương pháp giải tích. Sofiyev và Kuruoglu [9] đã nghiên cứu ứng xử vòng phi tuyến của vỏ nón cụt FGM, trên đàn hồi, dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển và phương pháp Galerkin. Các đặc trưng vật liệu vỏ và gân gia cường được giả thiết là liên tục theo hướng bề dày. Tác giả Dũng và nhóm nghiên cứu [10-12], dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển, lý thuyết vỏ biến dạng trượt bậc nhất, đã xem xét ứng xử vòng tuyến tính của vỏ nón cụt FGM, được gia cường lệch tâm, chịu tải nén dọc trục và áp lực ngoài bằng phương pháp giải tích. Tornabene và Viola [13] đã nghiên cứu ứng xử động của vỏ parabolic, panel trụ tròn và vỏ tròn xoay FGM, dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và phương pháp cầu phương vi phân suy rộng. Mất ổn định và sau ổn định của vỏ trống cũng được nghiên cứu với Stein [14] và Hutchinson [15].

Các bài toán ổn định vỏ tròn xoay như vỏ nón, vỏ cầu, vỏ trống, vỏ parabolic... dẫn đến hệ phương trình đạo hàm riêng có hệ số là hàm của tọa độ, do vậy tìm nghiệm giải tích của chúng khó khăn về toán học. Đây là lý do chính tại sao còn ít các nghiên cứu bằng giải tích về chúng. Trong nghiên cứu này, phân tích ổn định của vỏ tròn xoay bằng vật liệu cơ tính biến thiên, chịu áp lực ngoài, trong môi trường nhiệt độ với trường hợp nhiệt độ tăng đồng đều được thực hiện bằng phương pháp giải tích. Mô hình vỏ tròn xoay được xét là mô hình tạo bởi cung tròn quay quanh trục nằm trong mặt phẳng của nó. Sự truyền nhiệt qua thành kết cấu chưa được xét đến. Sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận và tuyến tính hóa giới hạn ở đại lượng nhỏ bậc hai đã thiết lập được các phương trình ổn định của vỏ dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển. Các phương trình thu được là hệ ba phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính có hệ số là hàm số đối với các thành phần chuyển vị. Các phương trình này được giải theo phương pháp Galerkin. Kết quả tính toán thu được biểu thức dạng hiển để xác định tải trọng uốn tới hạn. Phần tính toán số khảo sát ảnh hưởng của đặc tính vật liệu, các thông số kích thước hình học và nhiệt độ đến khả năng mất ổn định của vỏ.

2. Các hệ thức cơ sở và phương trình ổn định của vỏ tròn xoay FGM

2.1 Vật liệu composite cơ tính biến thiên (FGM)

Vật liệu FGM có thể có tính chất biến đổi liên tục theo một chiều, hai chiều hoặc ba chiều x, y, z . Tuy nhiên, ở đây ta chỉ xét loại vật liệu biến đổi theo một chiều từ mặt thuần gốm đến mặt thuần kim loại hoặc ngược lại. Tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu được giả thiết biến đổi theo chiều dày h của thành kết cấu theo quy luật một hàm lũy thừa của biến mô tả tọa độ theo phương chiều dày z . Theo quy luật này, tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu biến thiên theo hàm sau: [1, 12, 18].

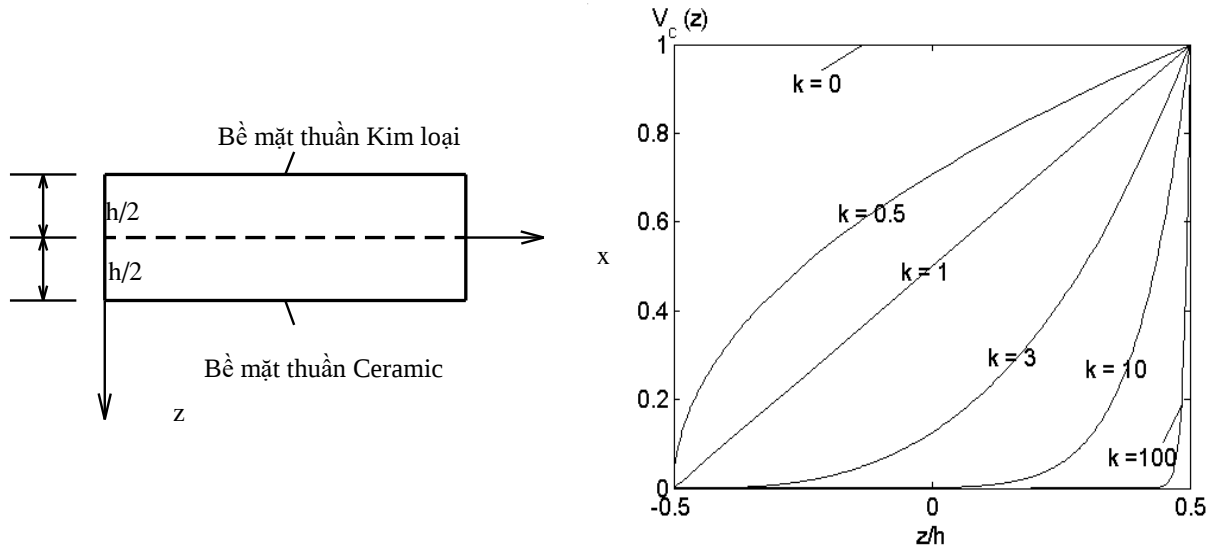
$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad V_m(z) = 1 - V_c(z), \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad (1)$$

trong đó: h là độ dày của kết cấu, k là một số không âm được gọi là chỉ số tỷ lệ thể tích (volume fraction index), k có thể được chọn để tối ưu ứng xử

của kết cấu; các chỉ số dưới c và m để chỉ thành phần gốm (ceramic) và kim loại (metal) tương ứng. Từ quy luật (1), rõ ràng giá trị $k = 0$ tương ứng với

trường hợp kết cấu đồng nhất đẳng hướng được làm từ vật liệu gốm, $k = 1$ là trường hợp các thành phần ceramic và kim loại phân bố tuyến tính qua chiều dày thành kết cấu; khi k tăng thì tỷ lệ thể tích

của thành phần gốm trong kết cấu giảm còn tỷ lệ thể tích của thành phần kim loại trong kết cấu tăng. Với $k = \infty$ cho ta trường hợp kết cấu đồng nhất đẳng hướng được làm từ vật liệu kim loại (hình 1).



Hình 1. Mô hình kết cấu làm từ vật liệu FGM và sự biến đổi của tỷ lệ thể tích ceramic qua chiều dày thành kết cấu theo quy luật lũy thừa

Các tính chất hiệu dụng P_{eff} của vật liệu có cơ tính biến thiên xác định theo quy tắc hỗn hợp sau đây.

$$P_{eff}(z) = Pr_c V_c(z) + Pr_m V_m(z), \quad (2)$$

trong đó: Pr là ký hiệu một tính chất cụ thể của vật liệu như mô đun đàn hồi E , hệ số dẫn nở nhiệt α hoặc hệ số truyền nhiệt K . Khi thay (1) vào (2) ta nhận được biểu thức sau đây của các tính chất hiệu dụng:

$$P_{eff}(z) = (Pr_c - Pr_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k + Pr_m, \quad (3)$$

Một cách cụ thể theo (3), mô đun đàn hồi E , mật độ ρ , hệ số dẫn nở nhiệt α và hệ số truyền nhiệt K được giả thiết là thay đổi theo độ dày với quy luật phân bố hàm lũy thừa, trong khi giả thiết hệ số Poisson (ν) là hằng số:

$$[E(z), \rho(z), \alpha(z), K(z)] = [E_m, \rho_m, \alpha_m, K_m] + [E_{cm}, \rho_{cm}, \alpha_{cm}, K_{cm}] \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad (4)$$

$$\text{trong đó: } E_{cm} = E_c - E_m, \quad \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m, \quad K_{cm} = K_c - K_m, \quad \nu(z) = \nu = \text{const} \quad (5)$$

Theo (1.4), khi chỉ số tỷ lệ thể tích $k = 0$, kết cấu là đồng nhất đẳng hướng ceramic và tỷ lệ thể tích của thành phần ceramic trong kết cấu giảm đi khi chỉ số k tăng. Hơn nữa, từ công thức (4) có thể thấy rằng:

$$E = E_m, \quad \alpha = \alpha_m, \quad K = K_m \text{ tại mặt } z = -h/2 \text{ (bề mặt giàu kim loại) và}$$

$$E = E_c, \quad \alpha = \alpha_c, \quad K = K_c \text{ tại mặt } z = h/2 \text{ (bề mặt giàu ceramic).}$$

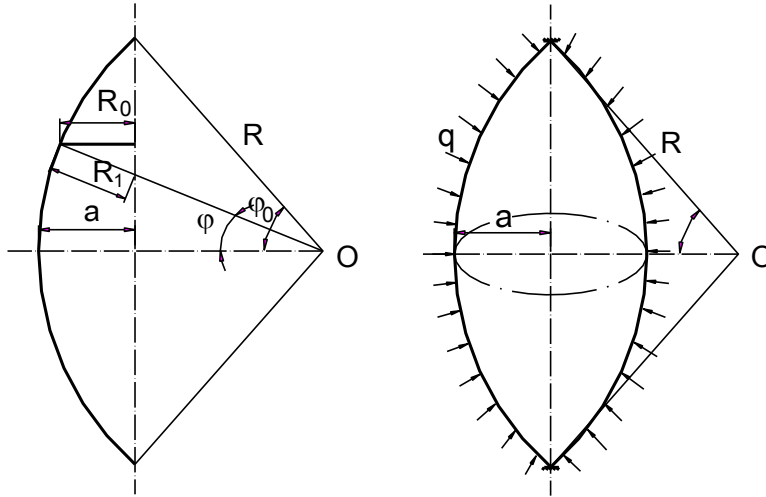
2.2 Các hệ thức cơ sở của vỏ tròn xoay

• Mô hình vỏ tròn xoay trong nghiên cứu

Xét mô hình vỏ tròn xoay tạo bởi cung tròn có bán kính R , độ dày h , quay quanh trục nằm trong mặt phẳng của nó (hình 2), trong đó: a - khoảng cách từ đỉnh cung đến trục quay; R_0 -

khoảng cách từ điểm xét đến trục quay; φ_0 - nửa góc chắn cung; φ - góc chắn cung từ điểm xét đến xích đạo.

Vỏ được làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên, chịu áp lực ngoài, trong môi trường nhiệt độ với trường hợp nhiệt độ tăng đồng đều.



Hình 2. Mô hình vỏ tròn xoay tạo bởi cung tròn gần xích đạo quay quanh trục nằm trong mặt phẳng của nó

• **Quan hệ chuyển vị - biến dạng**

Quan hệ phi tuyến chuyển vị - biến dạng theo lý thuyết độ võng lớn của Von Karman là [16-19].

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2, \\ \varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{RR_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \\ \gamma_{\varphi\theta}^0 &= \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{RR_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{RR_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (6)\end{aligned}$$

$$\chi_{\varphi} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_0 R^2} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$\chi_{\varphi\theta} = \frac{1}{RR_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{1}{RR_0^2} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (7)$$

trong đó: $\varepsilon_{\varphi}^0, \varepsilon_{\theta}^0, \gamma_{\varphi\theta}^0$ là các thành phần biến dạng ở mặt trung bình của vỏ.

Biến dạng tại điểm cách mặt trung bình một khoảng cách z là [16-19].

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}^0 - z\chi_{\varphi}; \quad \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^0 - z\chi_{\theta}; \quad \gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{\varphi\theta}^0 - 2z\chi_{\varphi\theta} \quad (8)$$

• **Liên hệ ứng suất – biến dạng, lực dẫn, mômen**

Theo định luật Hooke, liên hệ ứng suất-biến dạng có xét đến các hiệu ứng nhiệt độ, các mômen và lực tổng hợp của vỏ tròn xoay được cho bởi công thức [13,18,19]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\varphi} \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\varphi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (9)$$

$$(N_{\varphi}, N_{\theta}, N_{\varphi\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\varphi}, \sigma_{\theta}, \tau_{\varphi\theta}) dz, \quad (M_{\varphi}, M_{\theta}, M_{\varphi\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\varphi}, \sigma_{\theta}, \tau_{\varphi\theta}) z dz, \quad (10)$$

trong đó, $\alpha(z)$ là hệ số giãn nở nhiệt và ΔT là hằng số biểu thị sự thay đổi của nhiệt độ môi trường từ trạng thái ban đầu không có ứng suất.

Thay các liên hệ (6-9) vào (10), sau khi tích phân theo z ta được lực dẫn và mômen.

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_\varphi + \nu \chi_\theta) + T_1, \\ N_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_\varphi^0) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_\theta + \nu \chi_\varphi) + T_1, \\ N_{\varphi\theta} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} \chi_{\varphi\theta}^0 - \frac{E_2}{1+\nu} \chi_{\varphi\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) - \frac{E_3}{1-\nu^2} (\chi_\varphi + \nu \chi_\theta) + T_2, \\ M_\theta &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_\varphi^0) - \frac{E_3}{1-\nu^2} (\chi_\theta + \nu \chi_\varphi) + T_2, \\ M_{\varphi\theta} &= \frac{E_2}{2(1+\nu)} \chi_{\varphi\theta}^0 - \frac{E_3}{1+\nu} \chi_{\varphi\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó: $E_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz$, $E_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz$, $E_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 E(z) dz$ và $T_1 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} dz$, $T_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z E \alpha \Delta T}{1-\nu} dz$

được cho trong Phụ lục 1.

2.3 Phương trình cân bằng

Theo lý thuyết vỏ Donnell, phương trình cân bằng của vỏ tròn xoay được cho bởi [13, 18, 19].

$$R_0 \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} (N_\varphi - N_\theta) = 0 \quad (13)$$

$$R \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R_0 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} N_{\varphi\theta} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R R_0} \frac{\partial^2 M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R^2 R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2 R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{R R_0^2} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 R_0} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \varphi^2} (M_\varphi - M_\theta) + \frac{N_\theta}{R_1} + \frac{N_\varphi}{R} + N_\varphi \chi_\varphi + 2 N_{\varphi\theta} \chi_{\varphi\theta} + N_\theta \chi_\theta + q = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

trong đó: $a = R(1 - \cos \varphi_0)$; $R_0 = R(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$; $R_1 = R_0 / \cos \varphi$

2.4 Trạng thái màng

Bài toán đối xứng trục và không phụ thuộc vào góc θ và $N_\varphi^0 \neq 0, N_\theta^0 \neq 0$, còn $N_{\varphi\theta}^0 = 0, M_{ij} = 0$. Từ các phương trình (13), (14) và (15) có ba phương trình xác định lực màng. Giải hệ đó ta tìm được:

$$\begin{aligned} N_\theta^0 &= -\frac{qR}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} \right) - \frac{\left(1 - \cos \varphi_0 - \frac{\cos \varphi_0}{2} \varphi^2 \right) T_1}{2\pi R_1 \cos^2 \varphi} \\ N_\varphi^0 &= -qR \left(1 - \frac{R}{2R_1} + \frac{R}{2R_1} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} \right) - \frac{T_1}{2\pi R_1 \cos^2 \varphi} \\ N_{\varphi\theta}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

2.5 Phương trình ổn định

Giả thiết cung chắn gần đường xích đạo (góc φ) nhỏ. Để thiết lập các phương trình ổn định, ta sử dụng tiêu chuẩn tồn tại trạng thái cân bằng lân cận:

$$(u_0, v_0, w_0, N_{ij}^0, M_{ij}^0) \text{ và}$$

$$(u_0 + u^*, v_0 + v^*, w_0 + w^*, N_{ij}^0 + N_{ij}^*, M_{ij}^0 + M_{ij}^*)$$

cùng thỏa mãn hệ phương trình (13-15). Thay vào hệ phương trình (13-15) rồi lấy hiệu được hệ ba phương

trình ổn định đối với các gia số N_{ij}^*, M_{ij}^* . Sau đó, thay với ba ẩn u^*, v^*, w^* đồng thời thay R_0 và R_1 qua R , lực dẫn và mômen vào hệ ta được ba phương trình đối φ sau đó dùng xấp xỉ giới hạn ở đại lượng nhỏ bậc hai:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \frac{1}{1+t} \approx 1 - t + t^2, \quad \frac{1}{1-t} \approx 1 + t + t^2$$

Cuối cùng ta thu được hệ các phương trình:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\equiv A_{11}(u^*) + A_{12}(v^*) + A_{13}(w^*) = 0 \\ \Omega_2 &\equiv A_{21}(u^*) + A_{22}(v^*) + A_{23}(w^*) = 0 \\ \Omega_3 &\equiv A_{31}(u^*) + A_{32}(v^*) + A_{33}(w^*) = 0\end{aligned}\quad (17)$$

trong đó: $A_{ij}(i, j=1..3)$ được cho trong Phụ lục 2.

3. Phân tích ổn định của vỏ tròn xoay

Biểu thức xác định lực tới hạn:

Giả sử vỏ tròn xoay tựa đơn tại $\varphi = \pm\varphi_0$. Khi đó điều kiện biên có thể biểu diễn như sau:

$$w^* = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u^* = 0 \quad \text{tại } \varphi = \pm\varphi_0 \quad (18)$$

Điều kiện (18) có thể thỏa mãn nếu u^*, v^*, w^* được biểu diễn bởi:

$$u^* = U \sin \frac{m\pi\varphi}{\varphi_0} \cos \frac{n\theta}{2}; \quad v^* = V \cos \frac{m\pi\varphi}{\varphi_0} \sin \frac{n\theta}{2}; \quad w^* = W \sin \frac{m\pi\varphi}{\varphi_0} \sin \frac{n\theta}{2} \quad (19)$$

Thay (19) vào các phương trình (17), sau đó áp dụng phương pháp Bubnov – Galerkin, ta nhận được ba phương trình đối với (u, v, w) sau đây:

$$H_{11}U + H_{12}V + H_{13}W = 0 \quad (20)$$

$$H_{21}U + H_{22}V + H_{23}W = 0 \quad (21)$$

$$H_{31}U + H_{32}V + (H_{33} + H_{34}q + H_{35}T_1)W = 0 \quad (22)$$

trong đó: $H_{ij}(i=1..3, j=1..5)$ được cho trong Phụ lục 3.

Điều kiện để hệ ba phương trình (20), (21) và (22) có nghiệm không tầm thường là:

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} + H_{34}q + H_{35}T_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Từ đó suy ra biểu thức xác định lực tới hạn:

$$q_{cr} = - \frac{H_{33} + H_{35}T_1}{H_{34}} \quad (24)$$

Cần lưu ý rằng phương trình (24) là biểu thức hiển dùng để xác định tải trọng tới hạn q_{cr} và phân tích hiện tượng mất ổn định của vỏ tròn xoay FGM cột chịu tải trọng áp lực đều. Tải trọng q_{cr} vẫn phụ thuộc vào giá trị của m và n , do đó phải cực tiểu hóa các biểu thức này đối với m và n , từ đó thu được các giá trị tới hạn của q_{cr} .

4. Kết quả tính toán số

4.1 So sánh với kết quả cho nửa cầu FGM chịu áp lực ngoài

Xét trường hợp nửa cầu FGM có $R=2m$, $k=1$, $\Delta T=0$. Hỗn hợp vật liệu cấu thành vỏ gồm: Aluminum ($E_m = 70.10^9 N/m^2$) và Alumina ($E_c = 380.10^9 N/m^2$). Hệ số Poisson được chọn là $\nu = 0.3$. Kết quả so sánh khi cho độ dày của vỏ thay đổi thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. So sánh với nửa cầu FGM khi R/h thay đổi

R/h	120	150	200	250	300
q_{cr}	1.85E+07	1.17E+07	6.65E+06	4.25E+06	2.95E+06

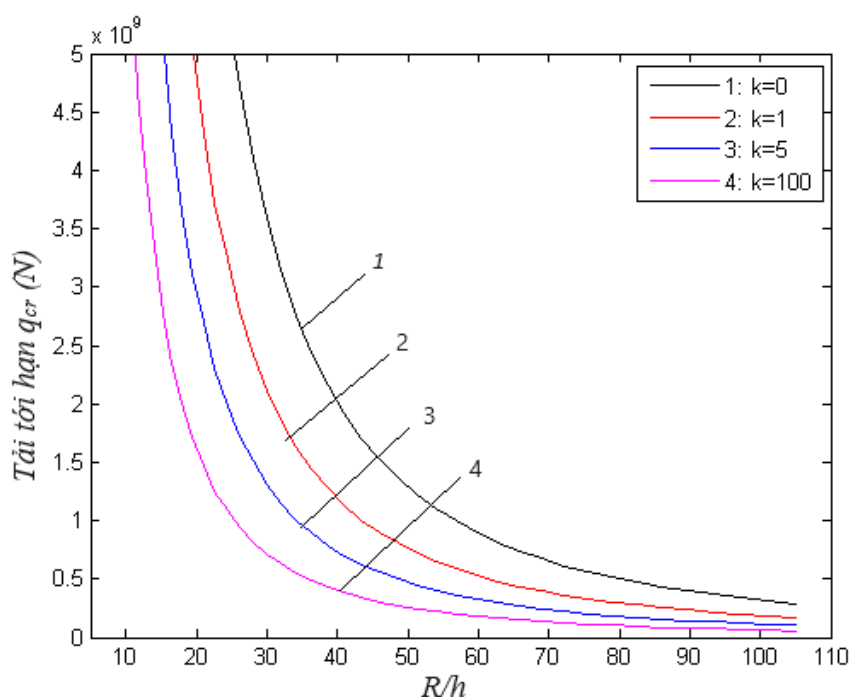
q_{cr} (nửa cầu)	1.74E+07	1.11E+07	6.25E+06	4.00E+06	2.78E+06
%	6.59	5.20	6.44	6.37	6.33

Kết quả so sánh cho thấy sai số là chấp nhận được, qua đó khẳng định độ tin cậy trong các tính toán.

4.2 Ảnh hưởng của tỷ số R/h và k đến giá trị của lực tới hạn

Bảng 2. Giá trị của lực tới hạn khi k thay đổi

k	0	0.5	1	5	10
q_{cr}	8.47E+08	4.32E+08	2.81E+08	1.50E+08	1.39E+08
[m,n]	[1,16]	[1,16]	[1,16]	[1,15]	[1,14]



Hình 3. Giá trị của lực tới hạn khi R/h và k thay đổi

Xét trường hợp vỏ tròn xoay FGM với $a = 1.5m$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta T = 300K$. Kết quả thể hiện như trong bảng 2 và trong hình 3. Qua kết quả tính toán minh họa cho thấy, khi tăng giá trị của k , giá trị của lực tới hạn giảm đi, điều này hoàn toàn phù hợp với thực tế vì khi tăng giá trị của k , tỉ phần thể tích của gốm trong vỏ giảm đi, tỉ phần thể tích của kim loại tăng lên làm cho vỏ mềm hơn, dễ mất ổn định hơn. Thêm nữa, từ hình 3 cho thấy, khi tăng tỉ số R/h thì tải tới hạn giảm đi, nguyên nhân khi tăng tỉ số R/h (với R không đổi) thì h giảm, vỏ mỏng hơn, dễ mất ổn định hơn.

4.3 Ảnh hưởng của nhiệt độ đến giá trị của lực tới hạn

Xét trường hợp vỏ tròn xoay FGM với $a = 1,5m$, $R/h = 150$, $\varphi_0 = \pi/6$ và $k=1$. Kết quả thể hiện trong Bảng 3. Từ bảng 3 có thể thấy, khi tăng nhiệt độ, tải tới hạn giảm đi, điều này là phù hợp vì khi tăng nhiệt độ, do hiệu ứng nhiệt trong vỏ làm cho vỏ mềm đi, dễ mất ổn định hơn.

Bảng 3. Giá trị của lực tới hạn khi nhiệt độ thay đổi

$\Delta T(K)$	0	300	400	500	600
q_{cr}	5.07E+09	2.81E+08	2.50E+08	2.35E+08	2.26E+08
[m,n]	[1,16]	[1,16]	[1,16]	[1,15]	[1,15]

4.4 Ảnh hưởng của a đến giá trị của lực tới hạn

Xét trường hợp vỏ tròn xoay FGM với $k=1, h=0.02m, \varphi_0 = \pi/6, \Delta T=300K$. Ảnh hưởng

của a tới tải tới hạn được thể hiện trong bảng 4. Từ bảng 4 có thể thấy, khi tăng a giá trị tải tới hạn giảm.

Bảng 4. Giá trị của lực tới hạn khi a thay đổi

a	2	2.5	5	8	12
q_{cr}	1.08E+07	6.91E+06	1.73E+06	6.74E+05	3.00E+05
$[m,n]$	[1,35]	[1,39]	[1,55]	[1,69]	[1,85]

4.5 Ảnh hưởng của φ_0 đến giá trị của lực tới hạn

Xét trường hợp vỏ tròn xoay FGM với $a=2m, k=1, R/h=150, \Delta T=300K$. Bảng 5

trình bày ảnh hưởng của φ_0 đến giá trị của lực tới hạn. Khi φ_0 giảm, giá trị tải tới hạn tăng lên.

Bảng 5. Giá trị của lực tới hạn khi φ_0 thay đổi

φ_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$
q_{cr}	5.96E+07	2.64E+08	1.27E+09	3.94E+09	1.98E+10
$[m,n]$	[1,23]	[1,16]	[1,10]	[1,8]	[1,5]

5. Kết luận

Nghiên cứu đã xây dựng các phương trình cơ bản cho bài toán ổn định tuyến tính của vỏ tròn xoay làm bằng vật liệu FGM với xấp xỉ giới hạn ở đại lượng nhỏ bậc hai. Mô hình vỏ được xét trong nghiên cứu tạo bởi cung tròn quay quanh trục nằm trong mặt phẳng của nó, tựa đơn, chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ với trường hợp nhiệt độ tăng đồng đều. Hệ các phương trình ổn định thu được là hệ các phương trình đạo hàm riêng có hệ số là các hàm số nên khó khăn về mặt toán học để giải hệ. Bài báo đã khắc phục khó khăn đó bằng phương pháp Bubnov – Galerkin. Đã tìm được biểu thức hiển cho phép xác định lực tới hạn của vỏ. Qua kết quả khảo sát số cho bài toán ổn định của vỏ tròn xoay chịu áp lực đều trong môi trường nhiệt độ, có thể rút ra một số kết luận như sau:

- Với vỏ có cùng kích thước thì sự thay đổi của tỷ phần vật liệu cấu thành vỏ ảnh hưởng lớn tới sự ổn định của vỏ. Hệ số k càng lớn hay độ cứng của vật liệu càng giảm, lực tới hạn q_{cr} càng nhỏ, vỏ càng dễ mất ổn định;

- Với vỏ có cùng tính chất thì sự biến thiên của tỷ số R/h (độ dày, mỏng của vỏ) ảnh hưởng tới sự ổn định của vỏ. Tỷ số R/h càng lớn hay vỏ càng

mỏng, lực tới hạn q_{cr} càng nhỏ, vỏ càng dễ mất ổn định;

- Với vỏ có cùng tính chất, cùng độ dày và cùng góc chấn cung φ_0 thì sự biến thiên khoảng cách từ đỉnh cung đến trục quay (a) ảnh hưởng tới sự ổn định của vỏ. Khoảng cách a càng lớn, lực tới hạn q_{cr} càng nhỏ, vỏ càng dễ mất ổn định;

- Với vỏ có cùng tính chất thì sự biến thiên của góc chấn cung φ_0 ảnh hưởng lớn tới sự ổn định của vỏ, φ_0 càng nhỏ, lực tới hạn q_{cr} càng lớn, vỏ càng ổn định;

- Với vỏ có cùng tính chất thì nhiệt độ ảnh hưởng tới sự ổn định của vỏ. Độ tăng nhiệt độ ΔT càng lớn lực tới hạn q_{cr} càng nhỏ, vỏ càng dễ mất ổn định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Koizumi (1993). *The concept of FGM*. Ceram Trans Funct Grad Mater; 34.3-10.
- [2] H. Huang, Q. Han. (2010), “*Research on nonlinear post-buckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads*”, Composites Structures, 92, pp.1352-1357.
- [3] H.S. Shen, J. Yang, S. Kitipornchai. (2010), “*Post-buckling of internal pressure loaded FGM cylindrical*

- shells surrounded by an elastic medium*", European Journal of Mechanic-A/Solids, 29, pp.448-460.
- [4] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, M.R. Eslami. (2011), "Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation", Composite Structures, 93, pp.3063-3071.
- [5] M.M. Najafizadeh, A. Hasani, P. Khazaeinejad. (2009), "Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells", Applied Mathematical Modelling, 33, pp.1151-1157.
- [6] N.D. Duc, H.V. Tung (2010), "Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects", Compos Struct, 92: 1664-1672.
- [7] N.D. Duc, P.T. Thang, N.T. Dao, H.V. Tac (2015), "Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metal-ceramic-metal layers surrounded on elastic foundations in thermal environment". Compos Struct 121, 134-141.
- [8] D.H. Bich, D.V. Dung, V.H. Nam, Ng. T. Phuong. (2013), "Nonlinear static and dynamical buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression", International Journal of Mechanical Sciences, 74, pp.190-200.
- [9] A.H. Sofiyev, Kuruoglu (2013), "Nonlinear buckling of an FGM truncated conical shells surrounded by an elastic medium", International Journal of Pressure Vessels and Piping, 107, pp. 38-49.
- [10] D.V. Dung, L.K. Hoa, N. T. Nga. (2014), "On the stability of functionally graded truncated conical shells reinforced by functionally graded stiffeners and surrounded by an elastic medium", Composite Structures, 108, pp.77-90.
- [11] D.V. Dung, L. Kh. Hoa. (2013), "Research on nonlinear torsional buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded thin circular cylindrical shells", Composites: Part B 51, pp. 300–309.
- [12] D.V. Dung, D. Q. Chan (2017), "Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT". Composite Structures 159: 827–841
- [13] F. Tornabene, E. Viola. (2009), "Free vibration analysis of functionally graded panels and shells of revolution". Meccanica, 44, pp. 255-281.
- [14] M. Stein, J.A. McElma (1965), "Buckling of segments of toroidal shells". AIAA J; 3: 1704-9.
- [15] J.W. Hutchinson (1967), "Initial post-buckling behavior of toroidal shell segments". Int J Solids Struct; 3: 97–115.
- [16] J.N. Reddy (2004), "Mechanics of laminated composite plates and shells-Theory and Analysis", CRC Press LLC.
- [17] D.O. Brush, B.O. Almroth (1975), "Buckling of bars, plates and shells". Mc Graw-Hill, New York.
- [18] M. Eslami (2018), Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells, Springer Int. Pub. AG, Gewer. 11, 6330 Cham, Switzerland.
- [19]. P. Marti (2013), "Theory of Structures". Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Rotherstr. 21, 10245 Berlin, German; First Edition.

Phụ lục 1

$$E_1 = E_m + \left[\frac{E_c - E_m}{k+1} \right] h,$$

$$E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left\{ \frac{E}{12} + (E_c - E_m) \left[\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right] \right\} h^3,$$

$$T_1 = -\frac{h\Delta T}{1-\nu} \left[\frac{E_m\alpha_m + \frac{1}{k+1}E_m(\alpha_c - \alpha_m) + \frac{1}{k+1}(E_c - E_m)\alpha_m}{+ \frac{1}{2k+1}(E_c - E_m)(\alpha_c - \alpha_m)} \right].$$

Phụ lục 2

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= -\frac{E_1\varphi}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{E_1(a_0+b_0\varphi^2)}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{E_1(a_0-b_0\varphi^2)}{2(1+\nu)a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{E_1\nu a_0 + E_1(\nu a_0 b_0 + 1)\varphi^2}{(1-\nu^2)a_0}, \\
 A_{12} &= \frac{E_1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{E_1(3-\nu)\varphi}{2(1-\nu^2)a_0}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
 A_{13} &= -\frac{E_2(a_0+b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)R}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} - \frac{E_2(a_0-b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)Ra_0^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial\theta^2} \\
 &\quad + \frac{E_2\varphi}{(1-\nu^2)R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{2E_2\varphi}{(1-\nu^2)Ra_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{E_1(1-a_0)[\nu-1+2\nu Ra_0 b_0]\varphi}{(1-\nu^2)a_0} \\
 &\quad + \frac{[E_2\nu a_0^2 - E_1Ra_0^2(a_0+\nu)] + [E_2a_0(\nu a_0 b_0 + 1) - E_1R(1+\nu)a_0^2 b_0]\varphi^2}{(1-\nu^2)Ra_0^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
 A_{21} &= \frac{E_1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{E_1(3-\nu)\varphi}{2(1-\nu^2)a_0}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
 A_{22} &= \frac{E_1(a_0-b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{E_1(a_0+b_0\varphi^2)}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{E_1\varphi}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{E_1(1-\nu)[a_0+(a_0 b_0 - 1)\varphi^2]}{2(1-\nu^2)a_0}, \\
 A_{23} &= -\frac{E_2(a_0-2b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)Ra_0^3}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} - \frac{E_2}{(1-\nu^2)R}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^2\partial\theta} + \frac{E_2\varphi}{(1-\nu^2)Ra_0}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} \\
 &\quad - \frac{[E_1Ra_0(\nu a_0 + 1) + E_2a_0(1-\nu)] + [E_2(1-\nu)b_0(a_0 - 1) - E_1Rb_0(1-a_0)]\varphi^2}{(1-\nu^2)Ra_0^2}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
 A_{31} &= \frac{E_2}{(1-\nu^2)R^3}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} + \frac{E_2(a_0-2b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^3R^3}\frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial\theta^2} - \frac{2E_2\varphi}{(1-\nu^2)a_0R^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{E_2(1+\nu)\varphi}{2(1-\nu^2)a_0^3R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
 &\quad + \frac{[E_1Ra_0(a_0+\nu) - E_2a_0(1+\nu)] - \{E_1\nu Rb_0(1-a_0) + E_2[1+(1+\nu)(a_0-1)b_0]\}\varphi^2}{(1-\nu^2)a_0^2R^3}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
 &\quad + \frac{[E_2(\nu a_0 - 2) - E_1R(1+\nu a_0)]\varphi}{(1-\nu^2)a_0^2R^3}, \\
 A_{32} &= \frac{E_2(a_0-3b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^4R^3}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + \frac{E_2(a_0-b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^2R^3}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^2\partial\theta} - \frac{E_2(\nu-3)\varphi}{2(1-\nu^2)a_0^2R^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} \\
 &\quad + \frac{2[E_1Ra_0(1+\nu a_0) - E_2a_0(\nu-2)] - \left\{2E_1Rb_0[2+a_0(\nu-1)] + E_2[2(\nu-2)b_0(a_0-2) + \nu-3]\right\}\varphi^2}{2(1-\nu^2)a_0^3R^3}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2E_3(a_0-2b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^3R^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^2\partial\theta^2}, \\
 A_{33} &= -\frac{E_3}{(1-\nu^2)R^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} - \frac{E_3(a_0-4b_0\varphi^2)}{(1-\nu^2)a_0^5R^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \frac{2E_3\varphi}{(1-\nu^2)a_0R^4}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} + \frac{E_3(\nu-3)\varphi}{(1-\nu^2)a_0^3R^4}\frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial\theta^2} \\
 &\quad + \frac{\left[2E_3(1+\nu)a_0 - 4E_2Ra_0(a_0+\nu) - q(1-\nu^2)R^3a_0^3\right] - \left[\frac{(1-a_0)R\varphi_0}{\pi} - \frac{Ra_{01}\varphi_0^3}{6\pi}\right]T_1 + \left\{4E_2\nu Rb_0(1-a_0) + 2E_3[1+(1+\nu)b_0(a_0-1)] - q(1-\nu^2)R^3[(a_0-b_0(1-a_0))(1-a_0)^2 + b_0(1-a_0)]\right\}\varphi^2}{2(1-\nu^2)a_0^2R^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left[\begin{aligned} & 2E_3(\nu-3)a_0 - 4E_2Ra_0(1+\nu a_0) \\ & -q(1-\nu^2)R^3a_0^3(2-a_0) \\ & + \left(\frac{(1-a_0)^2 Rb_0\varphi_0}{\pi} + \frac{(1-a_0)b_1\varphi_0^3}{3\pi} \right) T_1 \end{aligned} \right]}{2(1-\nu^2)a_0^4R^4} \left\{ \begin{aligned} & 4E_2R[2b_0(1+\nu a_0) + b_0(1-a_0)] \\ & + 2E_3[(\nu-3)b_0(a_0-3) + \nu-5] \\ & + q(1-\nu^2)R^3a_0^3[(1-a_0)^2 + 2b_0(2-a_0)] \end{aligned} \right\} \varphi^2 \\
 & + \frac{\left[\begin{aligned} & 2E_2R[a_0 + \nu + 2\nu b_0(1-a_0)] - E_3(\nu a_0 - 2) \end{aligned} \right] \varphi}{(1-\nu^2)a_0^2R^4} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{q(2-a_0)\varphi}{2R} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 & + \frac{\left[\begin{aligned} & E_2a_0(1-a_0)(2\nu b_0 + \nu - 1) \\ & - E_1Ra_0(a_0^2 + 2\nu a_0 + 1) \end{aligned} \right]}{(1-\nu^2)a_0^3R^3} \left\{ \begin{aligned} & E_2(1-a_0) \left[\begin{aligned} & \nu b_0(5a_0 - 4b_0 + 4a_0b_0) - 8\nu b_0^2(1-a_0) \\ & - 2(2\nu-1)b_0 - (1-\nu)b_0(a_0-2) \end{aligned} \right] \\ & + 2E_1Rb_0(1-a_0)(1+\nu a_0) \end{aligned} \right\} \varphi^2
 \end{aligned}$$

Ở đây: $a_0 = \cos\varphi_0, b_0 = -1/2$.

Phụ lục 3

$$H_{11} = (2m^2\pi^2 - 3)\varphi_0^2[(1-\nu)b_0\beta_n^2 - 2a_0^2b_0\alpha_m^2 - 2a_0(\nu a_0b_0 + 1)] + 6m\pi\varphi_0a_0^2\alpha_m$$

$$- 6m^2\pi^2a_0[2a_0^2\alpha_m^2 + (1-\nu)\beta_n^2 + 2\nu a_0]$$

$$H_{12} = -3m\pi a_0\beta_n[(3-\nu)\varphi_0 + 2m\pi(1+\nu)a_0\alpha_m]$$

$$H_{13} = 0$$

$$H_{21} = -3m\pi a_0\beta_n[2m\pi(1+\nu)\alpha_m + (3-\nu)\varphi_0]$$

$$H_{22} = (2m^2\pi^2 + 3)\varphi_0^2[2b_0\beta_n^2 - (1-\nu)a_0b_0\alpha_m^2 + 2a_0b_0 + \nu - 1] + 6m^2\pi^2[2 - 2\beta_n^2 - (1-\nu)a_0\alpha_m^2]$$

$$- 3m\pi(1-\nu)\varphi_0a_0\alpha_m$$

$$H_{23} = 0$$

$$H_{31} = 0$$

$$H_{32} = 0$$

$$H_{33} = 4E_1R^2a_0^2 \left[(2m^2\pi^2 - 3)\varphi_0^2b_0(1-a_0)(1+\nu a_0) - 3m^2\pi^2a_0(a_0^2 + 2\nu a_0 + 1) \right]$$

$$+ 2E_2Ra_0 \left\{ \begin{aligned} & (2m^2\pi^2 - 3)\varphi_0^2 \left\{ \begin{aligned} & a_0(1-a_0) \left[\begin{aligned} & \nu b_0(5a_0 - 4b_0 + 4a_0b_0) - 8\nu b_0^2(1-a_0) - 2(2\nu-1)b_0 \end{aligned} \right] \\ & - (1-\nu)(a_0-2)b_0 \end{aligned} \right\} \\ & - 2b_0\beta_n^2[2(1+\nu a_0) + 1-a_0] - 2\nu a_0^2b_0\alpha_m^2(1-a_0) \end{aligned} \right\} \\ & - 6m\pi\varphi_0a_0^2\alpha_m[a_0 + \nu + 2\nu b_0(1-a_0)] + 6m^2\pi^2a_0 \left[\begin{aligned} & a_0(1-a_0)(2\nu b_0 + \nu - 1) \\ & + 2\beta_n^2(1+\nu a_0) + 2a_0^2\alpha_m^2(a_0 + \nu) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$- 2E_3 \left\{ \begin{aligned} & (2m^2\pi^2 - 3)\varphi_0^2 \left\{ \begin{aligned} & a_0\beta_n^2[(\nu-3)b_0(a_0-3) + \nu-5] + a_0^3\alpha_m^2[1 + (1+\nu)b_0(a_0-1)] \\ & - 4b_0\beta_n^4 - 4a_0^2b_0\alpha_m^2\beta_n^2 \end{aligned} \right\} \\ & - 3m\pi\varphi_0a_0^2\alpha_m[a_0(\nu a_0 - 2) + (\nu-3)\beta_n^2 + 2a_0^2\alpha_m^2] + 6m^2\pi^2a_0 \left[\begin{aligned} & \beta_n^4 + (1+\nu)a_0^3\alpha_m^2 + \\ & (\nu-3)a_0\beta_n^2 + a_0^4\alpha_m^4 \\ & + 2a_0^2\alpha_m^2\beta_n^2 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$H_{34} = (1-\nu^2)R^3 \left\{ \begin{aligned} & (2m^2\pi^2 - 3)\varphi_0^2 \left\{ \begin{aligned} & a_0^3\alpha_m^2\{[a_0 - b_0(1-a_0)](1-a_0)^2 + b_0(1-a_0)\} \\ & - a_0^3\beta_n^2[(1-a_0)^2 + 2b_0(2-a_0)] \end{aligned} \right\} \\ & + 6m^2\pi^2a_0^4[a_0^2\alpha_m^2 + \beta_n^2(2-a_0)] \end{aligned} \right\}$$

$$H_{35} = \frac{1}{576} \frac{\varphi_0^2 R n^2 (\cos(\varphi_0)\varphi_0^2 + 6\cos(\varphi_0) - 6) (2m^2\pi^2 (\cos(\varphi_0)\varphi_0^2 + 6\cos(\varphi_0) - 6) - 3\cos(\varphi_0)\varphi_0^2)}{m^2\pi^2}$$

$$\text{ở đó: } \alpha_m = \frac{m\pi}{\varphi_0}, \beta_n = \frac{n}{2}.$$