

DỰ ĐOÁN KHẢ NĂNG CHỊU UỐN CỦA TIẾT DIỆN DẦM BÊ TÔNG CỐT THÉP BẰNG CÔNG THỨC THỰC HÀNH

PREDICTION OF FLEXURAL RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAM CROSS-SECTION BY PRACTICAL FORMULA

NGÔ TRỌNG HỮU^{a*}

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc TP.Hồ Chí Minh

*Corresponding author: email: huutng.ml@gmail.com

Article history: Received 23/02/2023, Revised 15/4/2023, Accepted 16/5/2023

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2023.vi.vol2-2>

Tóm tắt: Bài báo này trình bày quá trình xây dựng công thức thực hành dùng để dự đoán mô men uốn giới hạn của tiết diện dầm bê tông cốt thép (BTCT) hình chữ nhật thông qua phép hồi quy (regression). Dữ liệu dùng cho hồi quy được tạo bằng cách sử dụng phương pháp chia thớ (fiber) để phân tích phi tuyến hàng loạt tiết diện dầm BTCT thường gặp. Công thức thực hành nhận được bằng cách cho mô hình hồi quy tuyến tính (linear regression) khớp (fit) với tập dữ liệu huấn luyện (training set) và sau đó sẽ tiến hành dự đoán trên tập dữ liệu kiểm tra (test set). Hệ số xác định (the coefficient of determination) R^2 giữa hai giá trị mô men uốn giới hạn tính được từ công thức và kết quả phân tích phi tuyến đạt 0,9948, điều đó cho thấy khả năng dự đoán của công thức là khá tốt.

Từ khóa: dầm bê tông cốt thép, mô hình biến dạng phi tuyến, mô men uốn giới hạn, khả năng chịu uốn, hồi quy.

Abstract: This paper presents the process of developing a practical formula for predicting the ultimate bending moment of rectangular reinforced concrete (RC) beams through regression analysis. The data used for regression analysis was generated by using the fiber method to analyze a non-linear batch of commonly encountered RC beam cross-sections. The practical formula was obtained by fitting a linear regression model to the training set and then making predictions on the test set. The coefficient of determination, R^2 , between the bending moment values calculated from the formula and the results of the non-linear analysis was 0.9948, indicating a good predictive capability of the formula.

Keywords: reinforced concrete beam, nonlinear deformation model, ultimate moment, bending capacity, regression.

1. Giới thiệu

Việc xác định khả năng chịu lực, cụ thể ở đây là khả năng chịu uốn của cấu kiện dầm BTCT là quan

trọng trong thiết kế. Xác định khả năng chịu uốn chính là đi tìm mô men uốn giới hạn mà tiết diện dầm có thể chịu được để từ đó điều chỉnh các thông số đầu vào của bài toán sao cho thỏa mãn điều kiện chịu lực. Đối với dầm BTCT chịu uốn, độ bền của cấu kiện được tính toán theo điều kiện mô men uốn do ngoại lực gây ra không vượt quá mô men uốn giới hạn mà tiết diện dầm có thể chịu được. Độ bền của dầm không những quyết định đến sự làm việc an toàn mà còn ảnh hưởng đến tuổi thọ của cấu kiện cũng như của toàn bộ công trình.

Mô men uốn giới hạn của tiết diện dầm BTCT có thể được xác định dựa vào cường độ hoặc biến dạng của vật liệu. Khi tính toán tiết diện theo cường độ vật liệu, nội lực xuất hiện bên trong cấu kiện không vượt quá cường độ làm việc của vật liệu. Đây là phương pháp nội lực giới hạn vốn quen thuộc với những người làm công tác thiết kế. Trong lần xuất bản gần nhất, tiêu chuẩn thiết kế kết cấu BTCT TCVN 5574:2018 [1] đã cho phép sử dụng mô hình biến dạng phi tuyến thay cho mô hình ứng suất khi tính toán tiết diện cấu kiện dựa trên giả thiết tiết diện phẳng trước và sau khi chịu lực. Theo đó, thông qua các biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông và cốt thép (xác định quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tương đối), mô men giới hạn sẽ được xác định bằng cách phân tích phi tuyến tiết diện cấu kiện. Bổ sung này đã nhận được sự quan tâm từ các nhà nghiên cứu trong nước. Nhóm tác giả [2] đã tiến hành thí nghiệm uốn bốn điểm với tải trọng tĩnh trên các mẫu dầm để xác định mô men uốn giới hạn thực tế và so sánh với giá trị tính toán theo mô hình biến dạng bê tông. Kết quả so sánh cho thấy mô men uốn giới hạn có được từ lý thuyết là đáng tin cậy. Một nghiên cứu khác [3] cũng được thực hiện bằng cách khảo sát ứng xử uốn của dầm BTCT thông qua biểu đồ mô men-độ cong. Qua biểu đồ này, tác giả đã cho thấy ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép đến ứng xử uốn

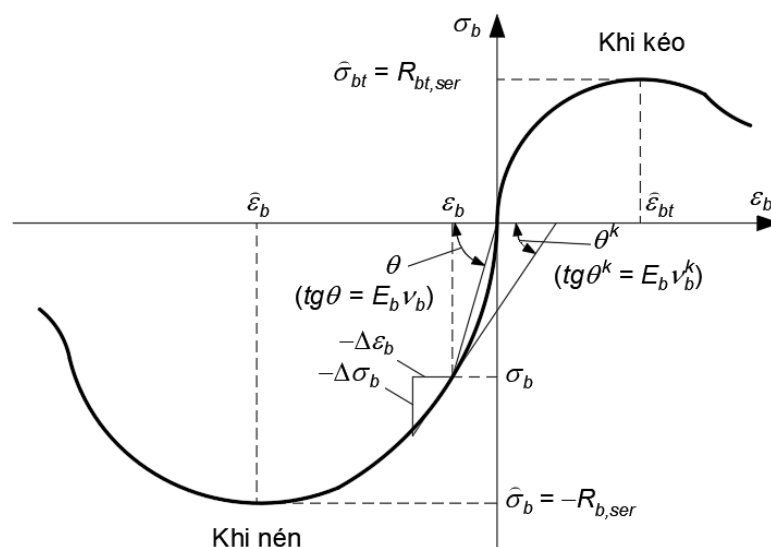
của dầm từ lúc dầm bắt đầu chịu tải cho đến khi bị phá hoại. Ngoài ra, khả năng chịu uốn của dầm xác định từ mô hình biến dạng phi tuyến cũng được tác giả so sánh với phương pháp tính theo nội lực giới hạn. Sự chênh lệch của kết quả đến từ hai phương pháp là không đáng kể.

Bài báo này sẽ giới thiệu cách xác định mô men uốn giới hạn của tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật chịu uốn bằng công thức thực hành đơn giản về mặt toán học mà vẫn mang lại hiệu quả cao. Công thức có được từ việc hồi quy (regression) dữ liệu, muốn vậy cần phải xác định khả năng chịu uốn của hàng loạt tiết diện dầm BTCT chịu uốn. Các biểu đồ thể hiện quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của bê tông và cốt thép sẽ được sử dụng cùng với phương pháp chia thớ (fiber) để tìm mô men uốn giới hạn của một số lượng lớn tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật.

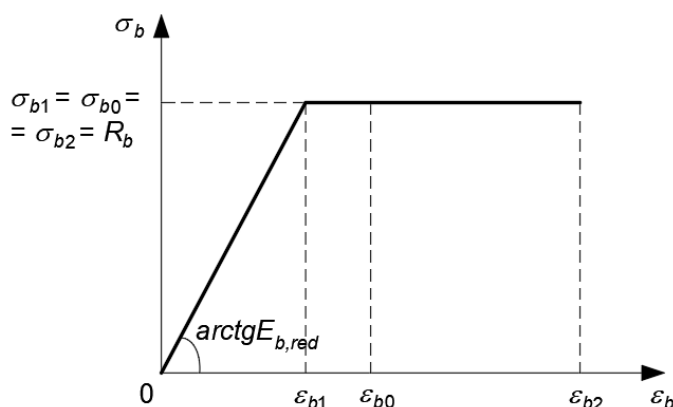
2. Cơ sở lý thuyết

2.1 Biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông và cốt thép

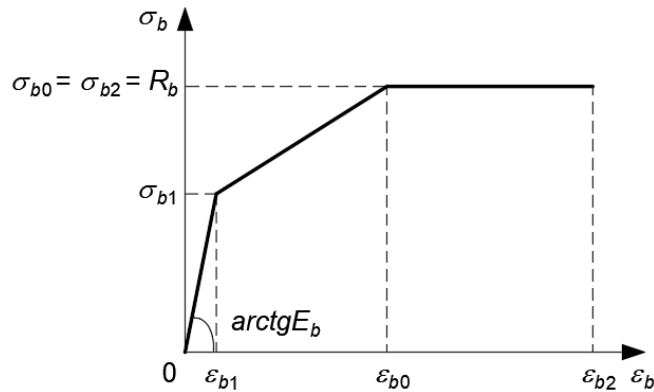
Các biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông có thể được sử dụng khi tính toán cấu kiện dầm BTCT theo mô hình biến dạng phi tuyến được quy định trong TCVN 5574:2018 như biểu đồ đường cong bao gồm cả nhánh chịu nén và nhánh chịu kéo (Hình 1), biểu đồ hai đoạn thẳng (Hình 2) hoặc ba đoạn thẳng (Hình 3) thể hiện được ứng xử của bê tông. Các điểm ứng suất và biến dạng thiết yếu trên biểu đồ cần được xác định rõ ràng. Đối với bê tông nặng, tiêu chuẩn khuyến nghị sử dụng các biểu đồ thể hiện quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tương đối đơn giản hóa dưới dạng các đoạn thẳng. So với biểu đồ hai đoạn thẳng, biểu đồ dạng ba đoạn thẳng có phần phức tạp hơn, tuy nhiên lại mô tả gần đúng hơn ứng xử phi tuyến thực của vật liệu bê tông.



Hình 1. Biểu đồ ứng suất-biến dạng dạng đường cong khi kéo và nén của bê tông theo TCVN 5574:2018



Hình 2. Biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông khi nén dạng hai đoạn thẳng theo TCVN 5574:2018

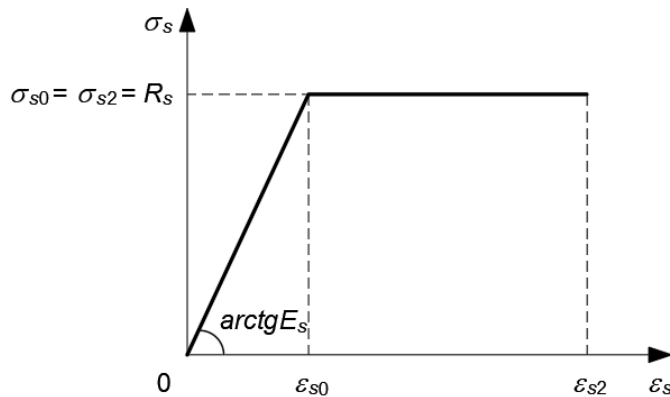


Hình 3. Biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông khi nén dạng ba đoạn thẳng theo TCVN 5574:2018

Theo biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông khi nén dạng ba đoạn thẳng (Hình 3), ứng suất nén của bê tông σ_b phụ thuộc vào biến dạng co ngắn tương đối của bê tông ε_b và có ba giai đoạn ứng xử cơ bản. Ban đầu, biến dạng ε_b còn nhỏ hơn ε_{b1} thì bê tông làm việc như vật liệu đàn hồi, quan hệ giữa ứng suất σ_b và biến dạng ε_b là tuyến tính thông qua hệ số mô đun đàn hồi E_b của bê tông. Sau đó, khi biến dạng ε_b tiếp tục tăng nhưng chưa vượt quá biến dạng tương đối giới hạn ε_{b0} thì ứng suất trong bê tông σ_b được xác định theo công thức (1):

$$\sigma_b = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{b1}}{R_b} \right) \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}} + \frac{\sigma_{b1}}{R_b} \right] R_b \quad (1)$$

trong đó: ε_{b1} , ε_{b0} và ε_{b2} lần lượt là các giá trị biến dạng tương đối giới hạn; σ_{b1} , σ_{b0} và σ_{b2} là các điểm ứng suất chính trên biểu đồ; R_b là cường độ chịu nén tính toán của bê tông. Ở giai đoạn cuối cùng, biến dạng tương đối trong bê tông ε_b tăng dần đến biến dạng cực hạn ε_{b2} và ứng suất trong bê tông lúc này luôn bằng với cường độ chịu nén R_b trước khi bị nén vỡ. Đối với bê tông có cấp cường độ chịu nén từ B60 trở xuống và chịu tác dụng ngắn hạn của tải trọng thì ε_{b2} bằng 0,0035. Giá trị biến dạng ε_{b0} lấy bằng 0,002 và giá trị ε_{b1} lấy bằng $0,6R_b/E_b$. Trong trường hợp bê tông chịu kéo, biểu đồ thể hiện quan hệ giữa ứng suất và biến dạng cũng giống như khi bê tông chịu nén với các thông số tương ứng trên biểu đồ được thay thế theo đúng quy định của tiêu chuẩn.



Hình 4. Biểu đồ ứng suất-biến dạng của cốt thép khi kéo dạng hai đoạn thẳng theo TCVN 5574:2018

Tiêu chuẩn thiết kế hiện hành cho phép sử dụng biểu đồ đường cong, biểu đồ thể hiện ứng suất và biến dạng thực tế gần đúng của cốt thép hoặc các biểu đồ đơn giản hóa dưới dạng các đoạn thẳng để làm biểu đồ ứng suất-biến dạng của cốt thép khi tính toán cấu kiện BTCT. Đối với một số loại cốt thép có giới hạn chảy thực tế như CB240-T, CB300-T [4], CB300-V, CB400-V và CB500-V [5] thì nên sử dụng biểu đồ hai đoạn thẳng theo mô hình đàn hồi-dẻo lý

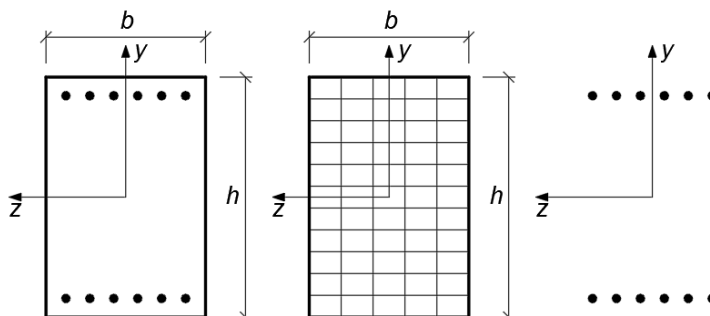
tương khi tính toán (Hình 4). Ứng xử khi chịu nén của cốt thép tương tự như ứng xử khi chịu kéo vì vậy biểu đồ ứng suất-biến dạng của cốt thép khi kéo và khi nén được lấy như nhau. Giá trị biến dạng cực hạn ε_{s2} trong trường hợp này lấy bằng 0,025. Trước khi bị chảy dẻo, thép làm việc đàn hồi với mô đun đàn hồi E_s lấy bằng 2.10^8 kN/m². Giá trị biến dạng ε_{s0} lấy bằng R_s/E_s , thời điểm này cũng chính là lúc ứng suất trong cốt thép đạt cường độ chịu kéo R_s . Biểu đồ hai đoạn

thẳng của cốt thép và ba đoạn thẳng của bê tông sẽ được sử dụng để phục vụ cho các tính toán trong bài báo này.

2.2 Phân tích tiết diện bằng phương pháp chia thớ

Phương pháp chia thớ là một phương pháp hiệu quả để phân tích ứng xử phi tuyến của tiết diện, đặc biệt khi sử dụng để phân tích các tiết diện có hình dạng phức tạp hay tiết diện dạng composite (BTCT cũng được xem là vật liệu composite) [6]. Khi đó, tiết

diện sẽ được chia thành các miền rời rạc, hình dạng và diện tích của mỗi miền có thể khác nhau (Hình 5). Thậm chí vật liệu ứng với mỗi miền cũng có thể khác nhau. Lúc này, tiết diện được xem như là sự kết nối của các miền lại với nhau, được gọi là tiết diện dạng thớ. Phương pháp chia thớ có nhiều điểm tương đồng với phương pháp phần tử hữu hạn do đó cũng có các ưu điểm như áp dụng được cho mọi hình dạng tiết diện; kết quả càng chính xác khi các miền được chia càng nhỏ.



Hình 5. Phương pháp chia thớ trong tiết diện chữ nhật

Phương pháp chia thớ không những áp dụng được cho tiết diện thanh dầm mà còn có thể áp dụng được cho cả tiết diện thanh dầm-cột (thanh chịu uốn và kéo/nén đồng thời). Thuật toán xác định mô men uốn và độ cứng chống uốn tiếp tuyến của tiết diện ứng với một giá trị độ cong κ cho trước như sau:

Bước 1: Nhận giá trị độ cong κ .

Bước 2: Giả sử vị trí trục trung hòa.

Bước 3: Từ độ cong tính biến dạng dọc trục ε_j tại trọng tâm mỗi thớ:

$$\varepsilon_j = y_j \kappa \quad (2)$$

Bước 4: Dựa vào ứng xử của vật liệu, xác định ứng suất σ_j và mô đun tiếp tuyến E_{jt} tương ứng với biến dạng ε_j .

Bước 5: Tính mô men uốn, lực dọc, độ cứng chống uốn theo các công thức sau:

Mô men uốn:

$$M = \int \sigma y dA = \sum \sigma_j A_j y_j \quad (3)$$

Độ cứng chống uốn:

$$(EI)_t = \int E_t y^2 dA = \sum E_{jt} A_j y_j^2 \quad (4)$$

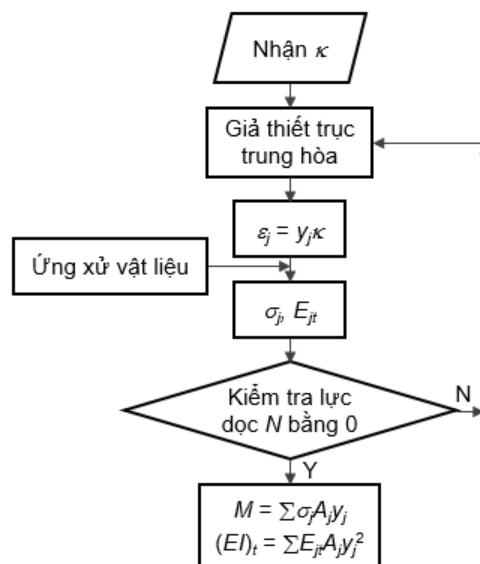
Lực dọc:

$$N = \int \sigma dA = \sum \sigma_j A_j \quad (5)$$

trong đó: y_j là tọa độ trọng tâm của thớ j theo phương trục y ; A_j là diện tích của thớ j .

Bước 6: Kiểm tra $N = 0$, nếu đúng thì dừng thuật toán. Nếu sai thì xác định lại vị trí trục trung hòa và lặp lại từ Bước 3 đến Bước 6.

Lưu đồ của thuật toán này được cho trên Hình 6.



Hình 6. Lưu đồ phân tích tiết diện dầm

3. Tạo dữ liệu

Hồi quy là một phương pháp được sử dụng để ước tính các mối quan hệ giữa một biến phụ thuộc và một hoặc nhiều biến độc lập. Phân tích hồi quy

thường được sử dụng cho các bài toán dự đoán, dự báo một vấn đề nào đó. Do vậy, phương pháp này rất phù hợp trong trường hợp xác định mô men uốn giới hạn M_u của tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật (trường hợp này được xem là một bài toán dự đoán mô men uốn giới hạn). Để có thể hồi quy dữ liệu cần phải có số lượng lớn tiết diện dầm BTCT. Ngoài ra, các mẫu tiết diện này sẽ được phân tích để xác định mô men giới hạn M_u bằng phương pháp chia thớ. Với lý do đó, các mẫu tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật phổ biến đã được lựa chọn để phân tích (Bảng 1). Việc lựa chọn các tiết diện dầm thường gặp với mục

đích mang lại tính tổng quát cho dữ liệu. Bê tông làm dầm gồm có B20, B25 và B30, cốt thép thuộc nhóm CB300-V và CB400-V. Diện tích cốt thép chịu kéo A_s được bố trí trong dầm phụ thuộc vào hàm lượng cốt thép. Hàm lượng cốt thép chịu kéo không được phép quá lớn để phá hoại xảy ra trong dầm luôn là phá hoại dẻo. Do đó, hàm lượng thép chịu kéo lớn nhất trong dầm được chọn là 2,5% và các trường hợp còn lại là 0,5%, 1%, 1,5% và 2%. Đây cũng là giới hạn sử dụng của công thức được xây dựng. Hàm lượng cốt thép chịu nén trong dầm lần lượt là 0%, 0,5%, 1%, 1,5%, 2% và 2,5%.

Bảng 1. Các tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật thường gặp

STT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b (m)	0,2	0,2	0,2	0,25	0,25	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6
h (m)	0,3	0,35	0,4	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9

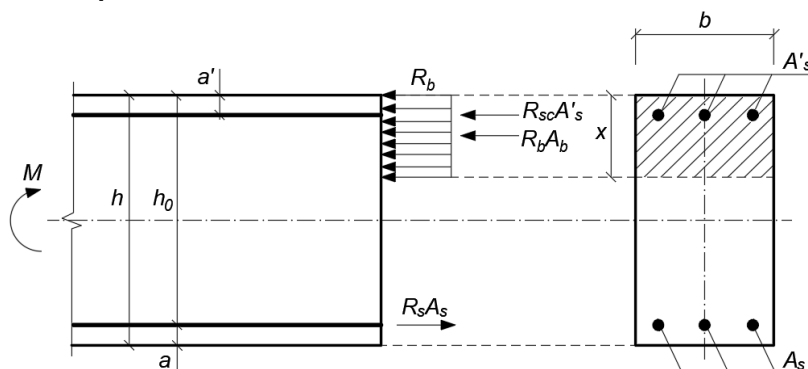
Với cách lựa chọn các tiết diện dầm như trên kết hợp với việc thay đổi vật liệu và diện tích cốt thép, sẽ có 2340 mẫu tiết diện dầm BTCT khác nhau được tạo ra. Một chương trình máy tính đã được xây dựng dựa trên các thư viện của OpenSees [11] sẽ thực hiện phân tích chia thớ để xác định mô men giới hạn của các mẫu tiết diện. Quá trình phân tích diễn ra bằng cách tăng dần độ cong của tiết diện cho đến khi biến dạng tương đối của bê tông hoặc cốt thép đạt giá trị biến dạng cực hạn và tại thời điểm đó sẽ xác định được mô men uốn giới hạn M_u trong tiết diện. Biến dạng tương đối cực hạn của cốt thép và bê tông

lần lượt là 0,025 và 0,0035. Phần tử có độ dài bằng không được sử dụng để mô phỏng, có nút đầu và nút cuối được xác định tại cùng một vị trí. Phần tử làm việc trong không gian hai chiều với bậc tự do tại mỗi nút là ba bậc. Mô hình vật liệu bê tông và cốt thép được khai báo lần lượt là biểu đồ ba đoạn thẳng và biểu đồ hai đoạn thẳng với các điểm ứng suất-biến dạng chính lấy theo quy định trong TCVN 5574:2018. Tiết diện dầm được chia nhỏ thành 20 thớ [7, 8] để tăng độ chính xác khi phân tích. Kết quả tính toán của một số tiết diện dầm được chọn ngẫu nhiên cho trong Bảng 2.

Bảng 2. Mô men giới hạn được tính theo phương pháp chia thớ của một số mẫu dầm

Số hiệu	b (m)	h (m)	R_b (kN/m ²)	E_b (kN/m ²)	$R_s = R_{sc}$ (kN/m ²)	E_s (kN/m ²)	A_s (m ²)	A_{sc} (m ²)	M_u (kN.m)
1	0,2	0,3	11500	$27,5 \cdot 10^6$	260000	$2 \cdot 10^8$	$2,6 \cdot 10^4$	0	16,6
171	0,3	0,5	14500	$30,0 \cdot 10^6$	350000	$2 \cdot 10^8$	$6,8 \cdot 10^4$	0	99,6
455	0,2	0,4	11500	$27,5 \cdot 10^6$	260000	$2 \cdot 10^8$	$18,0 \cdot 10^4$	$3,6 \cdot 10^4$	133,3
718	0,5	0,8	17000	$32,5 \cdot 10^6$	350000	$2 \cdot 10^8$	$54,0 \cdot 10^4$	$18,0 \cdot 10^4$	1214,8
879	0,25	0,4	14500	$30,0 \cdot 10^6$	260000	$2 \cdot 10^8$	$18,0 \cdot 10^4$	$9,0 \cdot 10^4$	151,3
1363	0,3	0,55	17000	$32,5 \cdot 10^6$	260000	$2 \cdot 10^8$	$22,3 \cdot 10^4$	$22,3 \cdot 10^4$	262,4
1522	0,5	0,9	14500	$30,0 \cdot 10^6$	350000	$2 \cdot 10^8$	$40,5 \cdot 10^4$	$60,8 \cdot 10^4$	1049,1

4. Xây dựng công thức thực hành



Hình 7. Sơ đồ đơn giản tính toán tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật

Ý tưởng xây dựng công thức thực hành xác định mô men giới hạn M_u được dựa trên nguyên tắc cơ bản là mô men là tích của lực và cánh tay đòn. Thật vậy, trong thực hành thiết kế, sơ đồ đơn giản thường được sử dụng để tính M_u của tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật, khi đó M_u sẽ bằng tổng các mô men được lấy đối với trục đi qua trọng tâm nhóm cốt thép chịu kéo (Hình 7) [9]. Theo sơ đồ này, ứng suất trong cốt thép chịu kéo (nén) đạt đến cường độ chịu kéo (nén) tính toán R_s (R_{sc}), ứng suất trong bê tông chịu nén đạt đến cường độ chịu nén tính toán R_b và phân bố đều trên vùng chịu nén quy ước x của bê tông. Trên cơ sở đó, M_u sẽ được tính theo công thức (6):

$$M_u = R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') \quad (6)$$

Hoặc M_u cũng có thể được tính theo biểu thức (7) bằng cách lấy mô men tại điểm đặt hợp lực của vùng bê tông chịu nén, cụ thể là:

$$M_u = R_s A_s (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s 0,5x \quad (7)$$

trong đó: b , h , h_0 lần lượt là chiều rộng, chiều cao và chiều cao tính toán của tiết diện; A_s , A'_s là diện tích cốt thép chịu kéo và chịu nén; R_b , R_s , R_{sc} lần lượt là cường độ chịu nén tính toán của bê tông và cường độ chịu kéo, nén của cốt thép; a , a' là chiều dài tính từ trọng tâm nhóm cốt thép chịu kéo, nén đến mép

chịu kéo, nén của bê tông; x là chiều cao quy ước của vùng bê tông chịu nén. Xét trường hợp tính M_u theo (7), có thể thấy hợp lực trong cốt thép chịu kéo $R_s A_s$ là thành phần lực, còn $(h_0 - 0,5x)$ chính là cánh tay đòn. Nhóm cốt thép chịu nén cũng được phân tích tương tự, $R_{sc} A'_s$ là thành phần lực còn $0,5x$ là cánh tay đòn. Thành phần cánh tay đòn của nhóm cốt thép chịu kéo $(h_0 - 0,5x)$ phụ thuộc vào chiều cao của tiết diện h (vì $h_0 = h - a$) và chiều cao vùng chịu nén x . Mà chiều cao vùng nén x cũng phụ thuộc vào chiều cao h , do đó để đơn giản, sẽ biểu diễn cụm $(h_0 - 0,5x)$ thành $\alpha_0 h^{\alpha_1}$. Bên cạnh đó thì các thông số R_s và A_s cũng có ảnh hưởng trực tiếp đến $(h_0 - 0,5x)$ cho nên nghiên cứu đề xuất tính toán mô men giới hạn theo (8) với các hệ số và lũy thừa sẽ được xác định thông qua phép hồi quy. Trong công thức (8), sự đóng góp của nhóm cốt thép chịu nén đã được bỏ qua vì mong muốn tối giản công thức mà vẫn mang lại hiệu quả tính toán.

$$M_u = \alpha_0 h^{\alpha_1} (R_s A_s)^{\alpha_2} \quad (8)$$

Mô hình hồi quy sẽ được sử dụng để xác định các hệ số nói trên có tên gọi là hồi quy tuyến tính (linear regression). Mô hình có đầu ra dự đoán $\hat{y}$ là một hàm đơn giản của đầu vào (9):

$$\hat{y} = f(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_d x_d + b x_0 = \mathbf{x}^T \mathbf{w} + b \quad (9)$$

trong đó: $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_d]^T$ là véc tơ đặc trưng đầu vào (x_0 được lấy bằng 1); $\mathbf{w} = [b, w_1, w_2, \dots, w_d]$ là véc tơ trọng số (weight vector) cần tìm. Mối quan hệ $\hat{y} = f(\mathbf{x})$ như (9) là mối quan hệ tuyến tính, do đó mô hình này có tên gọi là hồi quy tuyến tính [10]. Sai số dự đoán e giữa đầu ra dự đoán $\hat{y}$ và đầu ra thực y được biểu diễn bằng biểu thức (10). Bình phương được lấy vì sai số e có thể là một số âm. Khi tiến hành tối ưu, hệ số $\frac{1}{2}$ sẽ bị triệt tiêu bởi số mũ bình phương. Xét tất cả các cặp dữ liệu $(\mathbf{x}_i, y_i)$, việc xác định mô hình tốt nhất chính là đi tìm $\mathbf{w}$ sao cho hàm số (11) đạt giá trị nhỏ nhất. Hàm số này được gọi là hàm mất mát (cost function) của mô hình hồi quy tuyến tính với tham số mô hình là $\mathbf{w}$. Trong đó, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$ với N là số lượng dữ liệu được dùng để huấn luyện mô hình.

$$\frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} (y - \hat{y})^2 = \frac{1}{2} (y - \mathbf{x}^T \mathbf{w})^2 \quad (10)$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w})^2 = \frac{1}{2N} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}^T \mathbf{w}\|_2^2 \quad (11)$$

$$\frac{\nabla J(\mathbf{w})}{\nabla \mathbf{w}} = \frac{1}{N} \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{w} - \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{w} = \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (12)$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (13)$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^+ \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (14)$$

Giá trị tối ưu của $\mathbf{w}$ có thể tìm được bằng cách giải phương trình đạo hàm của $J(\mathbf{w})$ theo $\mathbf{w}$ bằng không. Khi đó, nghiệm duy nhất của phương trình (12) là (13) nếu như ma trận vuông $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ khả nghịch. Trong trường hợp ma trận $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ không khả nghịch, giả nghịch đảo (pseudo inverse) sẽ được sử dụng để tìm nghiệm của phương trình. Kể cả khi một ma trận không vuông thì giả nghịch đảo của ma trận đó vẫn tồn tại. Tổng quát, khi ma trận là vuông và khả nghịch, giả nghịch đảo cũng chính là nghịch đảo, lúc đó nghiệm của bài toán được tính theo công thức (14). Trong trường hợp véc tơ đặc trưng $\mathbf{x}$ có kích thước lớn kéo theo ma trận $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ cũng có kích thước lớn, dẫn đến việc tính ma trận nghịch đảo có thể trở nên bất khả thi. Lúc này, một phương pháp tối ưu có tên gọi là gradient descent sẽ giúp tránh được việc

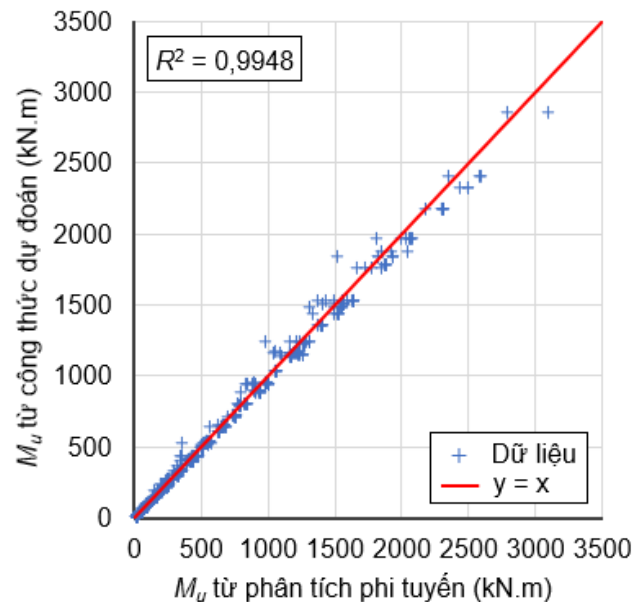
tính ma trận nghịch đảo. Tuy nhiên, phương pháp này sẽ không được làm rõ trong nghiên cứu này vì số lượng đặc trưng của mỗi điểm dữ liệu không nhiều do đó việc tính nghịch đảo của ma trận $\mathbf{XX}^T$ là khá dễ dàng với sự trợ giúp của máy tính.

$$\log M_u = \log \alpha_0 + \alpha_1 \log h + \alpha_2 \log (R_s A_s) \quad (15)$$

Công thức (8) cần được biến đổi thành dạng biểu thức (15) trước khi áp dụng hồi quy tuyến tính. Các mẫu dầm đã được tạo trước đó sẽ được sử dụng để thực hiện hồi quy. 2340 Mẫu tiết diện dầm sẽ được xáo trộn ngẫu nhiên trước khi chia thành hai phần. Một phần chiếm 70% dữ liệu gọi là tập huấn luyện (training set) và phần còn lại là tập kiểm tra (test set) được dùng để đánh giá khả năng dự

đoán của công thức hồi quy. Mô hình hồi quy tuyến tính được sử dụng từ thư viện Scikit-learn, là một thư viện nổi tiếng dành cho Học máy (Machine learning) [12]. Scikit-learn có đầy đủ các thuật toán học máy cơ bản và rất dễ sử dụng. Thuật toán hồi quy tuyến tính trên thư viện này có tên gọi là *linear_model.LinearRegression*. Trước hết, mô hình cần được làm khớp với dữ liệu trên tập huấn luyện thông qua từ khóa *fit*. Đây được xem là quá trình học trên dữ liệu của mô hình hồi quy. Kết quả thu được từ mô hình là véc tơ trọng số $\mathbf{w}$, cũng chính là các hệ số α_0 , α_1 và α_2 . Thay các trọng số này vào (8) sẽ thu được công thức (16):

$$M_u = 1,438h^{1,175}(R_s A_s)^{0,924} \text{ (kN.m)} \quad (16)$$



Hình 8. Kết quả dự đoán M_u trên tập kiểm tra của công thức thực hành

Sau cùng, khả năng tính toán mô men giới hạn của công thức (16) sẽ được kiểm chứng bằng cách thực hiện dự đoán M_u trên tập kiểm tra. Tập dữ liệu này không được đưa vào mô hình hồi quy trong quá trình xây dựng nhằm đảm bảo tính khách quan của kết quả dự đoán nhận được từ công thức thực hành. Hệ số xác định (the coefficient of determination) R^2 thường dùng trong thống kê sẽ được sử dụng để đánh giá kết quả dự đoán. Khả năng dự đoán của công thức là tốt khi hệ số R^2 giữa giá trị dự đoán và giá trị tính từ phân tích phi tuyến đạt 0,9948 (Hình 8).

5. Kết luận

Bài báo trình bày cách xác định mô men giới hạn của tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật bằng phương

pháp chia thớt. Hàng loạt các mẫu tiết diện dầm đã được tạo ra để thực hiện hồi quy dữ liệu. Các mẫu tiết diện dầm thường gặp đã được lựa chọn cùng với các cấp cường độ của bê tông và cốt thép quen thuộc. Diện tích cốt thép chịu kéo trong dầm được lựa chọn phụ thuộc vào hàm lượng cốt thép, nhận các giá trị lần lượt là 0,5%, 1%, 1,5%, 2% và 2,5%. Việc lựa chọn hàm lượng cốt thép chịu kéo tối đa trong dầm là 2,5% với mục đích không chế phá hoại xảy ra trong dầm luôn là phá hoại dẻo và đây cũng là giới hạn sử dụng của công thức được xây dựng.

Thông qua hồi quy tuyến tính, bài báo đã xây dựng thành công và từ đó đề xuất sử dụng công thức thực hành $M_u = 1,438h^{1,175}(R_s A_s)^{0,924}$ khi tính toán mô

men giới hạn của tiết diện dầm BTCT hình chữ nhật. Kết quả dự đoán của công thức thực hành trên tập kiểm tra là khá tốt khi hệ số xác định R^2 giữa giá trị dự đoán và kết quả phân tích phi tuyến là 0,9948. Một điểm cần lưu ý khi sử dụng công thức là đơn vị của mô men uốn giới hạn được tính bằng kN.m.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] TCVN 5574:2018. *Thiết kế kết cấu bê tông và bê tông cốt thép*. Bộ Khoa học và Công nghệ, Việt Nam.
- [2] Linh, N. N., Tân, N. N., Quang, N. V., Minh, P. Q. (2019). *Nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm xác định mô men uốn giới hạn của cấu kiện dầm BTCT theo mô hình biến dạng phi tuyến của bê tông*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ Việt Nam, Bộ Khoa học và Công nghệ, 62(1): 36-41.
- [3] Tuấn, N. H. A. (2020). *Khảo sát ứng xử uốn của dầm bê tông cốt thép thông qua biểu đồ mô men-độ cong tính theo TCVN 5574:2018*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Viện Khoa học Công nghệ Xây dựng - Bộ Xây dựng, (2): 62-69.
- [4] TCVN 1651-1:2008. *Thép cốt bê tông – Phần 1: Thép thanh tròn trơn*. Bộ Khoa học và Công nghệ, Việt Nam.
- [5] TCVN 1651-2:2008. *Thép cốt bê tông – Phần 2: Thép thanh vằn*. Bộ Khoa học và Công nghệ, Việt Nam.
- [6] Nhân, Đ. Đ. (2017). *Phân tích phi tuyến kết cấu thanh*. NXB Xây dựng, Hà Nội.
- [7] Thanh, N. Q. (2021). *Đánh giá độ tin cậy trong ứng xử của dầm bê tông cốt thép chịu uốn*. Trường Đại học Kiến trúc Thành phố Hồ Chí Minh.
- [8] Tường, N. T. C. (2021). *Phân tích sự làm việc của khung phẳng bê tông cốt thép khi chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa*. Trường Đại học Kiến trúc Thành phố Hồ Chí Minh.
- [9] Minh, P. Q., Phong, N. T., Công, N. Đ. (2013). *Kết cấu bê tông cốt thép – Phần cấu kiện cơ bản*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [10] Machine learning cơ bản. *Linear regression*, <https://machinelearningcoban.com/2016/12/28/linearregression/>, truy cập ngày 20/07/2022.
- [11] OpenSees. *User Documentation*, https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/OpenSees_User, truy cập ngày 19/06/2022.
- [12] Scikit-learn. *Linear models*, https://scikit-learn.org/stable/modules/linear_model.html, truy cập ngày 19/06/2022.