

PHÂN TÍCH THAM SỐ TẦN SỐ CỦA DẦM SANDWICH ĐA NHỊP CƠ CẤU TÍNH BIẾN THIÊN HAI CHIỀU

FREQUENCY PARAMETER ANALYSIS OF BI-DIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED MULTI-SPAN SANDWICH BEAM

VŨ NGUYỄN THÀNH^{a,*}

^aĐại học giao thông Vận tải

*Tác giả đại diện: Email: vunguyenthanh@utc.edu.vn

Ngày nhận 03/10/2023, Ngày sửa 24/10/2023, Chấp nhận 28/10/2023

<https://doi.org/10.59382/j-ibst.2023.vi.vol3-1>

Tóm tắt: Bài báo phân tích tham số tần số của dầm sandwich đa nhịp có cơ cấu tính biến thiên hai chiều (2D-FG) bằng lý thuyết dầm bậc cao. Dầm sandwich bao gồm ba lớp: lớp trên là vật liệu gốm, lớp đáy cấu tạo bằng vật liệu 2D-FG, lớp lõi làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên một chiều (1D-FG). Tính chất vật liệu biến đổi theo chiều cao và chiều dài dầm đa nhịp. Tham số tần số cơ bản của dầm sandwich đa nhịp được tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Công thức phần tử dầm đưa ra sẽ được kiểm chứng với những kết quả trước đó. Ảnh hưởng của tham số vật liệu, tỉ lệ giữa các lớp dầm, số nhịp dầm đến tham số tần số cơ bản của dầm sandwich đa nhịp được khảo sát chi tiết trong bài báo.

Từ khóa: dầm sandwich, lý thuyết biến dạng trượt bậc ba, dao động, phương pháp phần tử hữu hạn, 2D-FG, dầm đa nhịp.

Abstract: This paper presents the frequency parameter analysis of bi-directional functionally graded (2D-FG) multi-span sandwich beams by using a high order deformation theory. The beams consist of three layers, the upper face of the sandwich beam is made of ceramic, the lower face is made of 2D-FG and the core is made of 1D-FG. The material properties of the beam are assumed to vary continuously in the thickness and longitudinal directions by a power-law distribution. The frequency parameter of the sandwich multi-span beam is computed with the finite element method. The accuracy of the derived formulation is confirmed by comparing the obtained results with the published data. The effects of material and number of spans on the frequency parameter of the beam are examined and discussed.

Keywords: sandwich beam, third-order shear deformation theory, vibration, the finite element method, bi-directional functionally graded (2D-FG), multi-span beam.

1. Giới thiệu

Dầm liên tục nhiều nhịp là một mô hình kết cấu được sử dụng nhiều trong kỹ thuật cầu và cơ khí chế tạo. Phân tích dao động kết cấu dạng này rất quan trọng và được các nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu từ rất lâu. Chẳng hạn, Ichikawa và cộng sự [1] nghiên cứu động học cho dầm liên tục nhiều nhịp chịu tác dụng lực di động. Henchi và cộng sự [2] sử dụng phương pháp độ cứng động để nghiên cứu bài toán dầm nhiều nhịp chịu tác dụng nhiều lực di động.

Phát triển các phần tử kết cấu có cơ tính biến thiên theo hai hoặc nhiều hướng không gian khác nhau là đòi hỏi của thực tiễn nhằm đáp ứng khả năng chịu tải phức tạp và tối ưu hóa kết cấu. Nghiên cứu ứng xử cơ học của dầm FGM có cơ tính thay đổi theo cả chiều cao và chiều dài dầm (dầm 2D-FGM) được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Phương pháp Chebyshev được Chen và Chang [3] sử dụng trong phân tích dao động tự do của dầm 2D-FGM. Viet và cộng sự [4] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán tần số dao động riêng của dầm công-xôn với cơ tính biến đổi theo cả chiều cao và chiều dài dầm. Lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết dầm Timoshenko được các tác giả sử dụng để xây dựng mô hình toán học cho dầm. Yang và cộng sự [5] giả định quy luật hàm số mũ cho cơ tính trong nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm nano 2D-FGM. Phương pháp cầu phương vi phân cũng được sử dụng trong [6] để tính toán tần số và môđ dao động của dầm Euler-Bernoulli 2D-FGM. Phương pháp phần tử hữu hạn cũng được sử dụng để nghiên cứu mất ổn định và dao động tự do của dầm 2D-FGM [7], dao động cưỡng bức của dầm 2D-FGM chịu khối lượng di động [8].

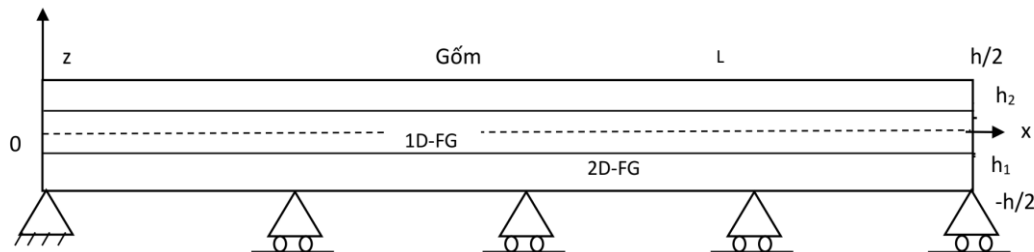
Kết cấu sandwich với tỷ số độ cứng trên khối lượng cao, được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp. Vì vậy, nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu sandwich FGM thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong thời gian gần đây. Chẳng hạn, sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc

nhất, Chakraborty và cộng sự [9] xây dựng mô hình phần tử hữu hạn cho phân tích đàn-nhiệt của dầm FGM và dầm sandwich FGM. Trên cơ sở các lý thuyết dầm khác nhau, Apetre và cộng sự [10] nghiên cứu ứng xử uốn của dầm sandwich với lõi là FGM. Rahmani và đồng nghiệp [11] phân tích dao động tự do của dầm sandwich FGM trên cơ sở lý thuyết bậc cao. Phương pháp cầu phương vi phân cải biên được Pradhan và Murmu [12] sử dụng để nghiên cứu dao động tự do của dầm sandwich FGM nằm trên nền đàn hồi, có tính tới ảnh hưởng của nhiệt độ. Ứng xử của dầm sandwich composite FGM dưới tác động của sóng xung kích được Gardner và đồng nghiệp [13] nghiên cứu bằng phương pháp thực nghiệm. Setoodeh và cộng sự [14] nghiên cứu dao động tự do của dầm sandwich với lõi là vật liệu thuần nhất, hai lớp vỏ là FGM, có xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ. Yarasca và đồng nghiệp [15] phát triển mô hình phần

tử dầm với bậc tự do để nghiên cứu ứng xử uốn của dầm sandwich FGM. Mô hình phần tử được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt tựa 3D. Ngoài ra, với sự trợ giúp của phương pháp thủy động lực các hạt trơn đối xứng, Karamanli [16] đã đánh giá chi tiết ảnh hưởng của các tham số vật liệu và tỷ số giữa độ dày các lớp tới độ võng và ứng suất của dầm sandwich 2D-FG. Trong đó mô hình toán học của dầm được xây dựng trên cơ sở lý thuyết tựa 3D.

Trong bài báo này, tác giả tính toán dao động tự do dầm đa nhịp sandwich: lớp trên làm bằng vật liệu gốm, lõi làm từ vật liệu 1D-FG và lớp đáy cấu tạo bằng vật liệu 2D-FG. Dưới sự hỗ trợ phần mềm Maple và Matlab, ảnh hưởng của tham số vật liệu, tỉ lệ giữa các lớp, số nhịp dầm đến tham số tần số được quan tâm nghiên cứu trong bài.

2. Bài toán và công thức phần tử hữu hạn



Hình 1a. Mô hình dầm sandwich đa nhịp có cơ tính biến thiên hai chiều

Hình 1a biểu diễn dầm sandwich đa nhịp, điều kiện biên một đầu dầm là gối cố định và một đầu là gối di động, ở giữa có các gối di động, L là chiều dài dầm đa nhịp, mỗi nhịp có chiều dài L_s , h là chiều cao

của dầm, chiều rộng là b. Giả sử giữa các lớp dầm là bám dính tuyệt đối. Dầm được làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên (FG). Mô hình cấu tạo dầm được cải tiến từ mô hình dầm sandwich của Karamanli [16]:

$$\begin{cases} V_c^3(x, z) = 1 & z \in \left[h_2; \frac{h}{2} \right] \\ V_c^2(x, z) = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^{nz} & z \in [h_1; h_2]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_c^1(x, z) = \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^{nx} \left(\frac{2(h_1 - z)}{h + 2h_1} \right)^{nz} & z \in \left[-\frac{h}{2}; h_1 \right]; \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1), nx, nz tương ứng là tham số vật liệu biến đổi theo chiều dài x và theo chiều cao dầm z . $V_c^k(x, z)$ ($k = 1, 2, 3$) là tỷ phần thể tích gốm ở tầng thứ k . Tính chất hiệu dụng của vật liệu được viết như sau:

$$\begin{aligned} V_m^k(x, z) + V_c^k(x, z) &= 1 \\ P^k(x, z) &= P_m V_m^k(x, z) + P_c V_c^k(x, z) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó, P_m, P_c minh họa cho mô đun đàn hồi, mật độ khối, mô đun trượt của kim loại và gốm. $V_m^k(x, z)$ ($k = 1, 2, 3$) là tỷ phần thể tích kim loại tầng thứ k .

Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao [17], chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang tại một điểm bất kỳ trên dầm được viết như sau:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z\gamma_0(x, t) - \alpha z^3[w_{0,x}(x, t) - \gamma_0(x, t)] \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3), $\alpha = \frac{4}{3h^2}$, $u_0(x, t)$ và $w_0(x, t)$ tương ứng là chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của một điểm trên trục x , γ_0 là góc trượt ngang, t là biến thời gian. Từ đây, biến dạng dọc trục và biến dạng ngang có dạng:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} - z\gamma_{0,x} - \alpha z^3(w_{0,xx} - \gamma_{0,x}) \\ \gamma_{xz} &= (1 - 3\alpha z^2)(w_{0,x} - \gamma_0) \end{aligned} \quad (4)$$

Với giả thuyết đàn hồi tuyến tính, trong đó ứng xử của vật liệu tuân theo định luật Hooke, ứng suất pháp và ứng suất tiếp có dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(x, z)\varepsilon_{xx} = E(x, z)[u_{0,x} - z\gamma_{0,x} - \alpha z^3(w_{0,xx} - \gamma_{0,x})] \\ \tau_{xz} &= G(x, z)\gamma_{xz} = \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)}(1 - 3\alpha z^2)(w_{0,x} - \gamma_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Trong đó, $E(x, z)$ và $G(x, z)$ là mô đun đàn hồi và mô đun trượt của dầm 2D-FG sandwich, nó biến đổi theo tọa độ x và z .

Từ (4) và (5), năng lượng biến dạng đàn hồi cho dầm sandwich như sau:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11}u_{0,x}^2 - 2A_{12}u_{0,x}\gamma_{0,x} + A_{22}\gamma_{0,x}^2 - 2A_{34}\alpha u_{0,x}(w_{0,xx} - \gamma_{0,x}) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha A_{44}\gamma_{0,x}(w_{0,xx} - \gamma_{0,x}) + \alpha^2 A_{66}(w_{0,xx} - \gamma_{0,x})^2 + H_{44}(w_{0,x} - \gamma_0) \right] dx \end{aligned} \quad (6)$$

Với A_{11} , A_{12} , A_{22} , A_{34} , A_{44} , A_{66} và B_{44} là các độ cứng của dầm 2D-FGM sandwich:

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{34}, A_{44}, A_{66})(x, z) &= \int_A E^k(x, z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dA \\ H_{44}(x, z) &= \int_A G^k(x, z)(1 - 6\alpha z^2 + 9\alpha^2 z^4) dA \\ G^k(x, z) &= \frac{E^k(x, z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (7)$$

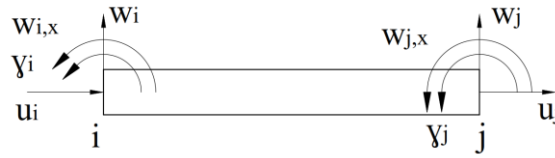
Trong đó, $E^k(x, z)$ và $G^k(x, z)$ là mô đun đàn hồi và mô đun trượt ở tầng thứ k của dầm sandwich. Tương tự như năng lượng biến dạng, động năng cho dầm được viết:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho^k(x, z)(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_{11}(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) - 2I_{12}\dot{u}_0\dot{\gamma}_0 + I_{22}\dot{\gamma}_0^2 - 2\alpha I_{34}\dot{u}_0(\dot{w}_{0,x} - \dot{\gamma}_0) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha I_{44}\dot{\gamma}_0(\dot{w}_{0,x} - \dot{\gamma}_0) + \alpha^2 I_{66}(\dot{w}_{0,x} - \dot{\gamma}_0)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (8)$$

Và I_{11} , I_{12} , I_{22} , I_{34} , I_{44} , I_{66} là các mô men quán tính của khối lượng:

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}, I_{34}, I_{44}, I_{66})(x, z) = \int_A \rho^k(x, z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dA \quad (9)$$

Trong đó, $\rho^k(x, z)$ là mật độ khối lượng lớp thứ k của dầm sandwich.



Hình 1b. Mô hình phần tử dầm sandwich

Để áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả chia dầm thành nhiều phần tử, mỗi phần tử có hai nút và mỗi nút có bốn chuyển vị (Hình 1b). Véc tơ chuyển vị nút d được viết:

$$\mathbf{d} = \{u_i, w_i, w_{i,x}, \gamma_i, u_j, w_j, w_{j,x}, \gamma_j\}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{d}; \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{N}_w \cdot \mathbf{d}; \quad \gamma_0 = \mathbf{N}_\gamma \cdot \mathbf{d} \quad (11)$$

Trong đó, $\mathbf{N}_u$, $\mathbf{N}_w$ và $\mathbf{N}_\gamma$ tương ứng là các ma trận hàm dạng cho $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$ và γ_0 . Trong bài báo này, sử dụng hàm dạng tuyến tính cho nội suy chuyển dịch dọc trục và góc trượt ngang, sử dụng hàm Hermite cho nội suy chuyển vị ngang.

Từ (6), (11) biểu thức năng lượng biến dạng cho

Từ (10), $u_i, w_i, w_{i,x}, \gamma_i, u_j, w_j, w_{j,x}, \gamma_j$ là các chuyển vị của nút i và nút j của phần tử dầm sandwich, chỉ số trên “T” dùng để ký hiệu chuyển vị cho véc tơ hoặc ma trận.

Các chuyển vị và góc trượt ngang được nội suy từ các chuyển vị nút theo công thức:

dầm sandwich đa nhíp được viết dưới dạng như sau:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ne} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (12)$$

Trong đó, ne là tổng số phần tử của dầm, $\mathbf{k}_e$ là ma trận độ cứng phần tử dầm:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_{uu} + \mathbf{k}_{uw} + \mathbf{k}_{\gamma w} + \mathbf{k}_{u\gamma} + \mathbf{k}_{\gamma\gamma} + \mathbf{k}_{\gamma\gamma w} + \mathbf{k}_s \quad (13)$$

Và

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{uu} &= \int_0^l N_{u,x}^T A_{11} N_{u,x} dx; & \mathbf{k}_{uw} &= -2 \int_0^l N_{u,x}^T A_{12} N_{\gamma,x} dx; \\ \mathbf{k}_{\gamma w} &= \int_0^l N_{\gamma,x}^T A_{22} N_{\gamma,x} dx; & \mathbf{k}_{u\gamma} &= -2\alpha \int_0^l N_{u,x}^T A_{34} (N_{w,xx} - N_{\gamma,x}) dx; \\ \mathbf{k}_{\gamma\gamma w} &= 2\alpha \int_0^l N_{\gamma,x}^T A_{44} (N_{w,xx} - N_{\gamma,x}) dx; & \mathbf{k}_{\gamma\gamma} &= \alpha^2 \int_0^l (N_{w,xx} - N_{\gamma,x})^T A_{66} (N_{w,xx} - N_{\gamma,x}) dx; \\ \mathbf{k}_s &= \int_0^l (N_{w,x} - N_{\gamma})^T B_{44} (N_{w,x} - N_{\gamma}) dx \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Từ (8) và (11), động năng của dầm viết như sau: } T = \frac{1}{2} \sum_{ne} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{d}} \quad (15)$$

$$\mathbf{m}_e \text{ là ma trận khối lượng của phần tử dầm: } \mathbf{m}_e = \mathbf{m}_{uu} + \mathbf{m}_{uw} + \mathbf{m}_{\gamma w} + \mathbf{m}_{u\gamma} + \mathbf{m}_{\gamma\gamma w} + \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \quad (16)$$

Và:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{uu} &= \int_0^l (N_u^T + N_w^T) I_{11} (N_u + N_w) dx; & \mathbf{m}_{uw} &= -2 \int_0^l N_u^T I_{12} N_{\gamma} dx; \\ \mathbf{m}_{\gamma w} &= \int_0^l N_{\gamma}^T I_{22} N_{\gamma} dx; & \mathbf{m}_{u\gamma} &= -2\alpha \int_0^l N_u^T I_{34} (N_{w,x} - N_{\gamma}) dx; \\ \mathbf{m}_{\gamma\gamma w} &= 2\alpha \int_0^l N_{\gamma}^T I_{44} (N_{w,x} - N_{\gamma}) dx; & \mathbf{m}_{\gamma\gamma} &= \alpha^2 \int_0^l (N_{w,x} - N_{\gamma})^T I_{66} (N_{w,x} - N_{\gamma}) dx; \end{aligned} \quad (17)$$

Với các biểu thức của ma trận độ cứng và ma trận khối lượng phần tử xây dựng được, ta có thể ghép nối các ma trận phần tử để tạo thành các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể cho dầm. Bỏ qua ảnh hưởng cản của vật liệu dầm, phương

trình chuyển động cho dầm 2D-FG có thể viết được dưới dạng ngôn ngữ phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Trong đó, $\mathbf{D}, \ddot{\mathbf{D}}$ là véc tơ chuyển vị nút, gia tốc

nút của toàn dầm. **M, K** tương ứng là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng tổng thể của dầm.

3. Kết quả số và thảo luận

Bài báo nghiên cứu dao động tự do cho dầm sandwich đa nhíp làm bằng vật liệu FG, với điều kiện biên là gối cố định và gối di động trên Hình 1a. Cụ thể, dầm làm từ vật liệu kim loại (Al): $E_m = 70$ Gpa, $\rho_m = 2702$ kg/m³, $\nu = 0.23$ và gốm (Al₂O₃), $E_c = 380$ Gpa, $\rho_c = 3960$ kg/m³, $\nu = 0.23$, $b=1$ m. Mặt trên của dầm làm từ vật liệu gốm, lớp giữa dầm làm bằng vật liệu 1D-FG, lớp đáy dầm là 2D-FG. Tỷ số giữa độ dày của các lớp dầm được ký hiệu qua ba chữ số tự nhiên trong ngoặc đơn, chẳng hạn (1-2-1) tức là tỷ số độ dày giữa các lớp đáy, lớp lõi và lớp trên tương ứng

là (1 : 2 : 1). Giả thiết chiều dài các nhíp dầm là bằng nhau trong quá trình khảo sát.

3.1 Kiểm tra công thức phần tử hữu hạn của bài báo thiết lập được

Để kiểm tra công thức phần tử hữu hạn cho dầm đa nhíp, tác giả đưa bài toán dầm sandwich về dầm đồng nhất ($n_x=0$, $n_z=0$, $h_1=-h/2$, $h_2=h/2$). Số liệu, công thức tính tham số tần số tính toán trong Bảng 1 được lấy từ tài liệu [1]. Nhìn vào Bảng 1, số liệu mà bài báo tính được và số liệu đã công bố gần như trùng nhau. Như vậy, chương trình tính tham số tần số cho dầm đa nhíp là đáng tin cậy.

Bảng 1. So sánh năm tham số tần số đầu tiên của dầm đa nhíp thuần nhất ($n_x=0$, $n_z=0$, $h_1=-h/2$, $h_2=h/2$)

Số nhíp		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	Bài báo	3,1413	6,2812	9,4186	12,5529	15,6846
	Ichikawa[1]	π	2π	3π	4π	5π
2	Bài báo	3,1413	3,9259	6,2812	7,0652	9,4186
	Ichikawa[1]	π	3,9266	2π	7,0686	3π
3	Bài báo	3,1413	3,5559	4,2965	6,2812	6,7049
	Ichikawa[1]	π	3,5564	4,2975	2π	6,7076
4	Bài báo	3,1413	3,3928	3,9259	4,4622	6,2812
	Ichikawa[1]	π	3,3932	3,9266	4,4633	2π

Bảng 2. So sánh tham số tần số cơ bản dầm một nhíp FG ($n_x=0$, $h_1=-h/2$, $h_2=h/2$)

n_z		$L_s/h=10$	$L_s/h=30$	$L_s/h=100$
0	Bài báo	2,8042	2,8440	2,8487
0	Sina [18]	2,797	2,843	2,848
0	Şimşek [19]	2,804	2,843	2,848
0,3	Bài báo	2,7013	2,7382	2,7425
0,3	Sina [18]	2,695	2,737	2,742
0,3	Şimşek [19]	2,701	2,738	2,742

Bài báo kiểm tra công thức phần tử cho dầm một nhíp 2D-FG bằng cách đưa dầm về dầm có cơ tính biến thiên một chiều (1D-FG) như Bảng 2. Số liệu và công thức tính toán trong Bảng 2 được lấy từ tài liệu [18,19]. Từ Bảng 2, kết quả bài báo và kết quả đã công bố, sai số không đáng kể. Do đó, chương trình tính toán do bài báo thiết lập cho dầm có cơ tính biến thiên có độ tin cậy cao.

3.2 Kết quả mô phỏng số của bài báo

Để mô phỏng kết quả số, bài báo tính toán tham

số tần số cho dầm sandwich đa nhíp có cơ tính biến thiên theo công thức:

$$\mu_i^2 = \omega_i^2 L_s^2 \sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}} \quad (19)$$

Trong (19), μ_i là tham số tần số thứ i của dầm, L_s chiều dài một nhíp dầm, A là diện tích thiết diện ngang dầm, I là mô men quán tính dầm, ω_i là tần số thứ i của dầm sandwich đa nhíp có cơ tính biến thiên hai chiều.

Bảng 3. Khảo sát sự hội tụ của công thức phần tử hữu hạn cho dầm một nhịp sandwich (1-1-1)

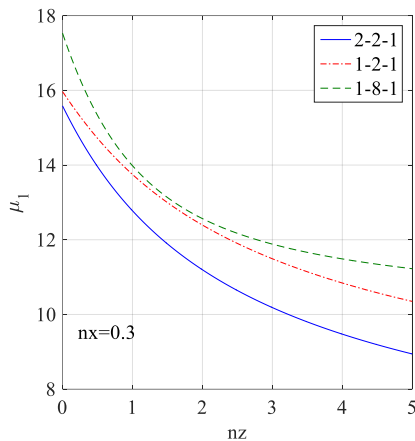
nx	nz	ne=12	ne=14	ne=16	ne=18	ne=24	ne=26	ne=28	ne=30
0,3	0,3	3,9141	3,9141	3,9141	-	-	-	-	-
	2	3,5951	3,5948	3,5947	3,5946	3,944	3,5944	3,5944	-
	5	3,2688	3,2684	3,2681	3,2679	3,2676	3,2675	3,2675	3,2675
2	0,3	3,6521	3,6520	3,6519	3,6518	3,6518	3,6518	-	-
	2	3,3190	3,3186	3,3184	3,3182	3,3179	3,3178	3,3178	-
	5	3,0280	3,0275	3,0272	3,0269	3,0266	3,0265	3,0264	3,0264

Bảng 4. Khảo sát sự hội tụ cho dầm sandwich (1-1-1) đa nhịp ($nx=0,3$, $nz=0,3$)

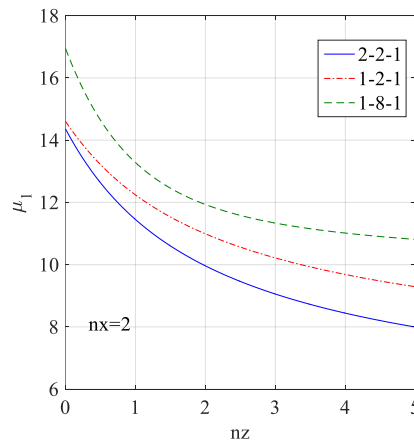
Số nhịp	μ_i	ne=24	ne=28	ne=32	ne=36	ne=42	ne=48
2	μ_1	3,9141	3,9141	3,9141	-	-	-
	μ_2	4,8876	4,8876	4,8876	-	-	-
	μ_3	7,8071	7,8071	7,8071	-	-	-
3	μ_1				3,9141	3,9141	3,9141
	μ_2				4,4286	4,4286	4,4286
	μ_3				5,3470	5,3470	5,3470

Nhìn vào Bảng 3 ta thấy, để tính tham số tần số cho dầm sandwich 1-1-1, bài báo cần chia dầm tối thiểu thành 28 phần tử. Từ Bảng 4, để đảm bảo sự hội tụ khi tính tham số tần số cho dầm sandwich (1-1-1) đa nhịp, số phần tử cần để khảo sát bằng số phần tử hội tụ cho một nhịp dầm nhân với số nhịp của dầm.

Tương tự như vậy, bài báo cũng khảo sát sự hội tụ cho dầm sandwich khác. Để đảm bảo sự hội tụ, lưới 36 phần tử với độ dài bằng nhau sẽ được sử dụng để khảo sát các kết quả số dưới đây.

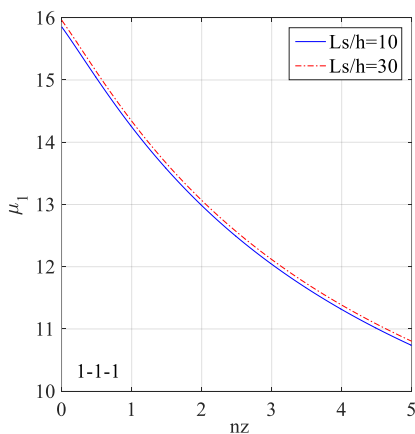


(a) Trường hợp $nx=0,3$

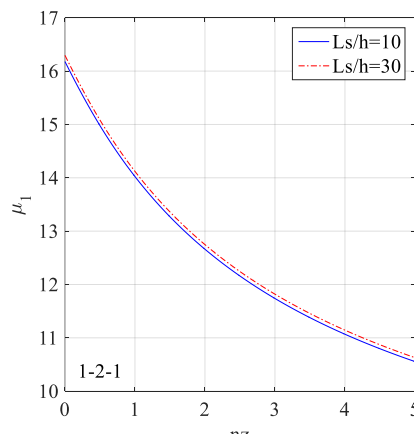


(b) Trường hợp $nx=2$

Hình 2. Ảnh hưởng của chiều cao lõi dầm đến tham số tần số cơ bản của dầm đa nhịp ($Ls/h=20$, 3 nhịp)



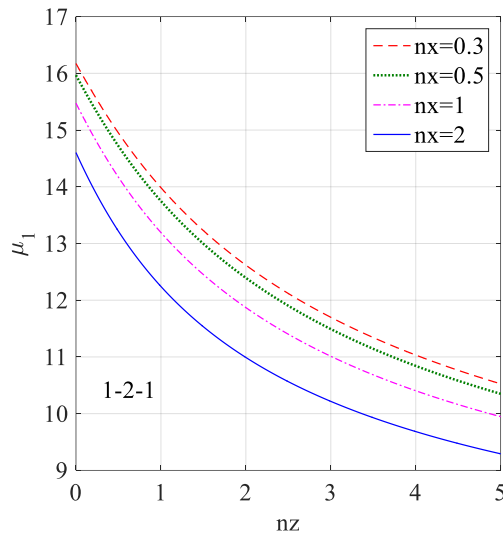
(a) Dầm 1-1-1



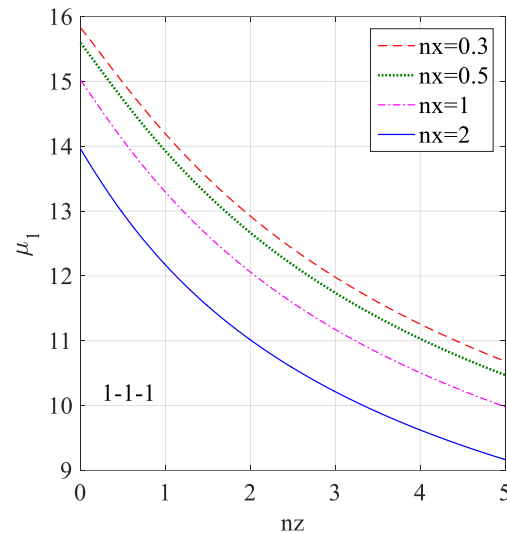
(b) Dầm 1-2-1

Hình 3. Ảnh hưởng tỉ lệ Ls/h lên tham số tần số cơ bản của dầm đa nhịp 2D-FGM ($nx=0,2$, 2 nhịp)

Hình 2 minh họa ảnh hưởng tỉ lệ giữa các lớp dầm và tham số tần số cơ bản của dầm sandwich ba nhịp khi cho hai giá trị của tham số vật liệu $n_x=0,3$ và $n_x=2$. Từ hình vẽ cho thấy, khi chiều cao của lõi dầm tăng dần lên thì tham số tần số cơ bản cũng tăng lên bất kể tham số vật liệu n_z tăng từ 0 đến 5.



(a) Tỉ lệ giữa các lớp dầm: 1-2-1



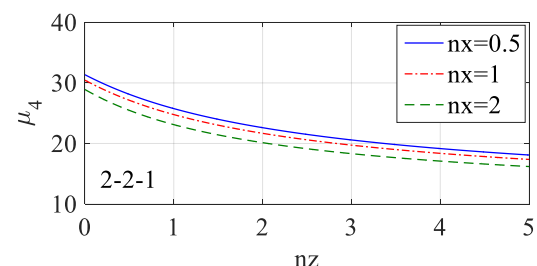
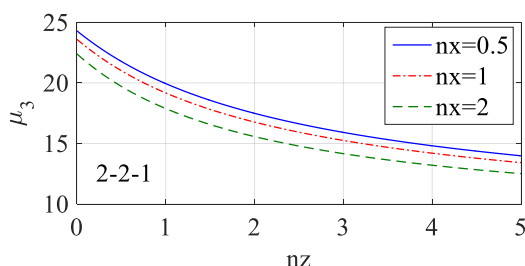
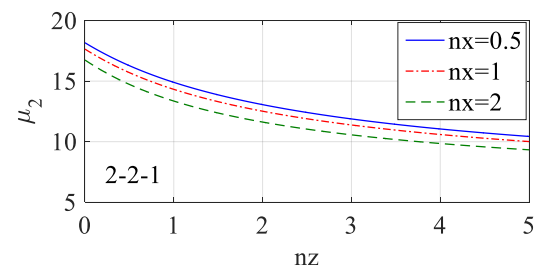
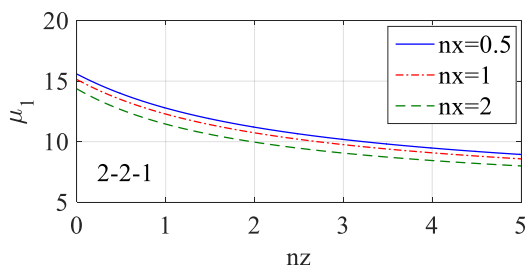
(b) Tỉ lệ giữa các lớp dầm: 1-1-1

Hình 4. Mối quan hệ giữa tham số vật liệu và tham số tần số cơ bản của dầm đa nhịp 2D-FGM ($L_s/h=20$, 2 nhịp)

Hình 4 minh họa ảnh hưởng của tham số vật liệu n_x , n_z đến tham số tần số của dầm sandwich đa nhịp khi cho tỉ lệ hai lõi dầm khác nhau (1-2-1), (1-1-1). Hình 4 vẽ cho dầm 2 nhịp và chiều dài mỗi nhịp $L_s/h=20$. Khi tham số vật liệu biến đổi theo hai chiều n_z , n_x tăng dần thì tham số tần số giảm dần.

Hình 5 minh họa mối quan hệ của bốn tham số

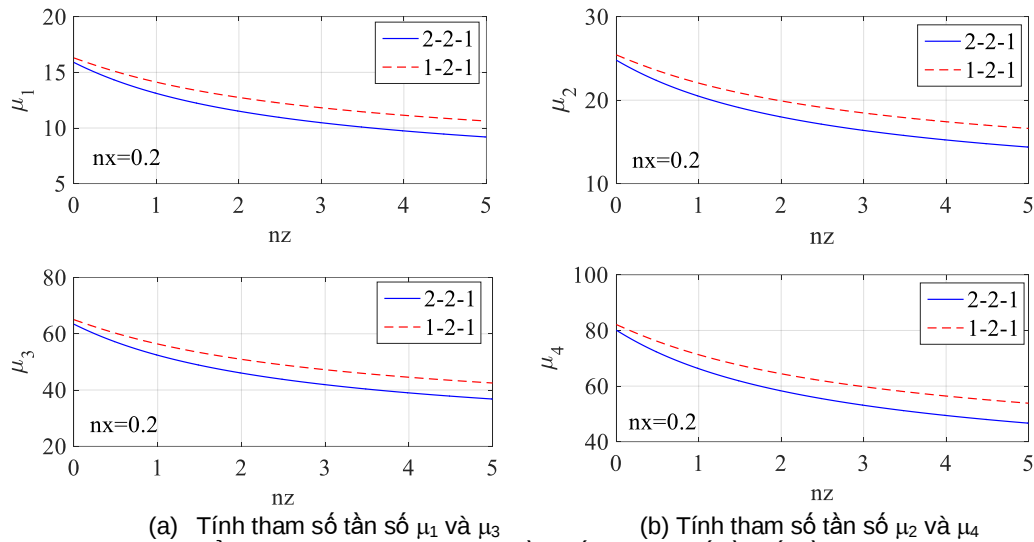
tần số đầu tiên với tham số vật liệu của dầm sandwich đa nhịp khi cho số nhịp dầm là 4, chiều dài của một nhịp dầm $L_s/h=20$, tỉ lệ giữa các lớp dầm 2-2-1. Tất cả bốn tham số tần số đều giảm dần khi tham số vật liệu tăng lên đối với dầm bốn nhịp như hình vẽ. Nhìn hình vẽ ta thấy, tham số tần số đầu tiên là thấp nhất, tham số tần số thứ tư là cao nhất khi tăng dần các tham số vật liệu n_x , n_z .



(a) Tính tham số tần số μ_1 và μ_3

(b) Tính tham số tần số μ_2 và μ_4

Hình 5. Ảnh hưởng của tham số vật liệu đến 4 tham số tần số đầu tiên của dầm sandwich đa nhịp 2D-FGM ($L_s/h=20$, 4 nhịp)



Hình 6. Ảnh hưởng của tỉ lệ các lớp dầm đến 4 tham số tần số đầu tiên của dầm sandwich đa nhíp 2D-FGM ($L_s/h=30$, 2 nhíp)

Mối quan hệ giữa tỉ lệ giữa các lớp dầm và bốn tham số tần số đầu tiên của dầm sandwich đa nhíp được thể hiện trên Hình 6, xét dầm 2 nhíp với chiều dài mỗi nhíp $L_s/h=30$, tham số vật liệu biến đổi theo chiều dài $nx=0,2$. Chiều cao của lõi dầm tăng lên thì bốn tham số tần số của dầm cũng tăng lên. Khi $nz=0$, bốn tham số tần số tăng không đáng kể mặc cho tỉ lệ lõi dầm tăng lên.

4. Kết luận

Bài báo phân tích dao động tự do cho dầm sandwich đa nhíp có cơ tính biến thiên hai chiều bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Công thức phần tử hữu hạn cho dầm sandwich đã được thiết lập trong bài báo. Từ đó, phương trình vi phân chuyển động cho dầm sandwich được thiết lập. Dưới sự hỗ trợ của các phần mềm, ảnh hưởng của các tham số vật liệu nx , nz , số nhíp dầm, tỉ lệ giữa các lớp dầm đã được mô phỏng trên các hình vẽ trong bài báo. Tỉ lệ giữa các lớp dầm cũng như số nhíp dầm đóng vai trò quan trọng trong phân tích dao động của dầm sandwich đa nhíp có cơ tính biến thiên hai chiều.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2023-CB-005.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ichikawa, M., Miyakawa, Y. and Matsuda, A. (2000), *Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass*. J.Sound and Vibration, Vol.230, No.3, pp. 611-628.
- [2] Henchi, K., Fafard, M. and Dhatt, G.. (1997), *Dynamic behavior of multi-span beams under moving loads*. J. Sound and Vibration, Vol.199, No.1, pp. 33-50.
- [3] Chen, W.R. and Chang, H (2020). *Vibration analysis of bidirectional Functionally graded Timoshenko beams using Chebyshev collocation method*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, pp 21-59.
- [4] Viet, N.V, Zaki,W and Wang, Q (2020). *Free vibration characteristics of Sectioned unidirectional/bidirectional functionally graded material cantilever beams based on finite element analysis*. Applied Mathematics and Mechanics, pp.1–18.
- [5] Yang, T. Tang, Y., Li, Q, and Yang, X.D (2018). *Nonlinear bending, buckling and vibration of bi-directional functionally graded nanobeams*. Composite Structures, 204:313–319.
- [6] Tang, Y, Lv, X, and T. Yang (2019). *Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration*. Composites Part B: Engineering, 156:319–331.
- [7] Rajasekaran, S. and Khaniki, H.B (2018). *Free vibration analysis of bi-directional functionally graded single/multi-cracked beams*. International Journal of Mechanical Sciences, 144:341–356.
- [8] Rajasekaran. S and Khaniki, H.B (2019). *Size-dependent forced vibration of nonuniform bi-directional functionally graded beams embedded in*

- variable elastic environment carrying a moving harmonic mass*. Applied Mathematical Modelling, 72:129–154.
- [9] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. and J. N. Reddy (2003). *A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials*. International Journal of Mechanical Science, 45:519–539.
- [10] Apetre, N. A., B. V. Sankar and D. R. Ambur (2008). *Analytical modeling of sandwich beams with functionally graded core*. Journal of Sandwich Structures and Materials, 10:53–74.
- [11] Rahmani, O., Khalili, S. M. R., Malekzadeh, K. and H. Hadavinia (2009). *Free vibration analysis of sandwich structures with a flexible functionally graded syntactic core*. Composite Structures, 91:229–235.
- [12] Pradhan, S.C. and Murmu, T. (2009). *Thermo-mechanical vibration of an fgm sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method*. Sound and Vibration, 321:342–362.
- [13] Gardner, N., Wang, E., and A. Shukla (2012). *Performance of functionally graded sandwich composite beams under shock wave loading*. Composite Structures, 94(5):1755–1770.
- [14] Setoodeh, A.R., Ghorbanzadeh, M. and Malekzadeh, P. (2012). *A two-dimensional free vibration analysis of functionally graded sandwich beams under thermal environment*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 226(12):2860–2873.
- [15] Yarasca, J., Mantari, J. and Arciniega, R. (2016). *Hermite–lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams*. Composite Structures, 140:567–581.
- [16] Karamanlı, A. (2017). *Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory*. Composite Structures, 174:70–86.
- [17] Reddy, J.N. (1984). *A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*. Journal of Applied Mechanics, 745-752.
- [18] Sina, S.A., H.M. Navazi, and H. Haddadpour (2009). *“An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams”*, Materials & Design, 3, pp. 741-747.
- [19] Şimşek, M. (2010). *Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories*, Composite Structures, 4, pp. 904-9.